Calcolo delle Probabilità. Esonero parziale (20/12/05)
Soluzioni (tracce)

ESERCIZIO 1
Chiamo X la vincita. X ha valori in $\{0, 1000\}$.
1) $E(X) = 1000P(X = 1000)$. Per calcolare $P(X = 1000)$ si può procedere nel seguente modo. Sia E l'evento "esce testa". Allora

$$P(X = 1000) = P(X = 1000|E)P(E) + P(X = 1000|E^c)P(E^c)$$
$$= \frac{1 + 4\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}\frac{1}{4} + \frac{1 + 4\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}\frac{3}{4}$$

2) T è v.a. geometrica di parametro $p = P(X = 1000)$. Quindi $E(T) = 1/p$ e $Var(T) = 1/p^2 - 1/p$. Allora $E(T^2) = Var(T) + E(T)^2 = 2/p^2 - 1/p$.

ESERCIZIO 2
1) X, Y esistono poicheè la tabella ha entrate non negative con somma totale pari a 1,
2)

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se } x = 0, \\ 2/3 & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$p_Y(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x = -1, \\ 1/3 & \text{se } x = 0, \\ 1/6 & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1/3 & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Dato che $E(X) = 4/3$ e $E(Y) = -1/3$, $E(10X + 3Y) = 10E(X) + 3E(Y) = 37/3$.
XY assume valori $0, -2, 2$. Quindi

$E(XY) = -2P(XY = -2)+2P(XY = 2) = -2P(X = 2, Y = -1)+2P(X = 2, Y = 1) = -1/3$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8/3 - (4/3)^2 = 8/9$.
X, Y non sono indipendenti, infatti

$$1/6 = p_{(X,Y)}(0, 0) \neq p_X(0)p_y(0) = 1/9$$

ESERCIZIO 3

$X = X_1 + X_2 + X_3$
1) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\mathbb{E}(X_3) = 100+50+20 = 170$. Essendo X_1, X_2, X_3 indipendenti $Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) = 100 + 50 + 20 = 170$. Il punto 1) puo' anche essere risolto osservando che X e' v.a. di Poisson con parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.
2) X e' v.a. di Poisson con parametro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Infatti abbiamo visto a lezione che la somma di due v.a. di Poisson indipendenti di parametro μ e ν è v.a. di Poisson di parametro $\mu + \nu$. Quindi $X_1 + X_2$ è v.a. di Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$. $X_1 + X_2$ e X_3

sono indipendenti quindi $X = (X_1 + X_2) + X_3$ è v.a. di Poisson di parametro $(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3$. In particolare,

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & \text{se } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3) Sia N il numero di sportelli di Banca Intesa funzionanti in un dato giorno nella città di Udine. Allora N è v.a. binomiale di parametri $n = 3, p = 0,99$. Quindi $\mathbb{E}(N) = 3 \cdot 0,99 = 2,97$.