MATEMATICA DISCRETA I: ALGEBRA. PROVA SCRITTA DEL 17-7-2000;

(1). (a). Determinare tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{18}, +)$, il gruppo additivo delle classi resto modulo 18. Determinare poi tutti i possibili generatori di $(\mathbb{Z}_{18}, +)$.
(b). Sia $G = S_6$ il gruppo simmetrico su sei elementi. Determinare il numero degli elementi di ordine 3 (si ricordi che vi sono $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ modi di scegliere k elementi in un insieme di n elementi).

(2). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2 e W lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×3. Sia $F_k : V \to W$ l'applicazione $F_k(X) = XA_k$, ove

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e k è un parametro reale.
(a). Si determinino i valori di k per cui F_k è un operatore lineare.
(b). Per tali valori si trovi una base di $Ker(F_k)$.
(c). Si dica per quali valori di k F_k è un isomorfismo.

(3). Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (2, 2, 1, -1), \quad v_2 = (1, 1, 3, 1), \quad v_3 = (0, 0, -5, t).$$

(a). Si determinino i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui tali vettori sono contenuti in una base di $\mathbb{R}^4$.
(b). Posto $t = 0$, si determini una base che li contiene.
(c). Detto S il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1, v_2, v_3, si determinino i valori di t per cui esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $Im(f) = S$.

(4).(a). Definire la nozione di vettori linearmente dipendenti in uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$.
(b). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e siano U, W sottospazi di V. Si provi che

$$dim(U + W) + dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W).$$

(5). (a). Sia $G = GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali invertibili $n \times n$ e sia $H = \{A \in G \mid \det(A) > 0\}$. Si provi che H è un sottogruppo normale di G.
(b). Sia G un gruppo, e sia $\varphi : G \to G$ l'applicazione definita da $\varphi(x) = x^{-1}$. Si provi che φ è biunivoca. Si provi poi che φ è un isomorfismo di gruppi se e solo se G è abeliano.