SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA I 17-7-2000 CANALE A-L

Esercizio 1 (a). $\mathbb{Z}_n$ ha uno e un solo sottogruppo per ogni divisore di n e i possibili generatori sono le classi $\overline{m}$ con $0 < m < n$, m primo con n. Pertanto nel caso $n = 18$ si hanno i seguenti sottogruppi non banali, di ordini 2,3,6,9:

$$\{\overline{0}, \overline{9}\}, \quad \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\}, \quad \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}\}, \quad \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}.$$

I generatori sono poi $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}$.

(b). Ricordiamo che se una permutazione è espressa come prodotto di cicli disgiunti, il suo ordine è il m.c.m. della lunghezza di cicli. Pertanto una permutazione di S_6 ha ordine 3 se e solo se è un 3-ciclo o il prodotto di due 3-cicli disgiunti. Per contare il numero dei 3-cicli, osserviamo che ogni scelta di un sottoinsieme di $\{1, \dots, 6\}$ composto da tre elementi dà luogo a due 3-cicli distinti: se tale sottoinsieme è $\{i, j, k\}$, $1 \leq i < j < k \leq 6$, si hanno i 3-cicli (i, j, k), (i, k, j). Dato che i sottoinsiemi di cui sopra sono $\binom{6}{3} = 20$, si hanno 40 3-cicli. Per contare gli altri elementi di ordine tre osserviamo che fissando i tre elementi del primo 3-ciclo si fissano automaticamente anche quelli del secondo 3-ciclo, e in questo modo ogni prodotto di due 3-cicli disgiunti viene contato due volte, perchè cicli disgiunti commutano: dunque il numero in questione è $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \binom{6}{3} = 40$. In definitiva gli elementi di ordine tre sono 80.

Esercizio 2 (a). Siano $X, Y \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$; allora:

$$F_k(aX + bY) = (aX + bY)A_k = aXA_k + bYA_k = aF_k(X) + bF_k(Y)$$

e F_k è lineare per ogni valore di k.
(b). Risulta

$$F_k \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 & x_1 + x_2 & x_1 + x_2 \\ kx_3 & x_3 + x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Per trovare $Ker(F_k)$ occorre risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} kx_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ kx_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema ha per $k \neq 0$ solo la soluzione banale, mentre per $k = 0$ lo spazio delle soluzioni ha per base i vettori $(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)$. In corrispondenza si ottiene la base di $Ker(F_0)$ formata dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Poichè ' V, W hanno dimensioni diverse, F_k non può mai essere un isomorfismo.

Esercizio 3 (a). v_1, v_2, v_3 fanno parte di una base se e solo se sono linearmente indipendenti. La matrice delle componenti di v_1, v_2, v_3 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è equivalente per righe alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & t \end{pmatrix}$. Dunque v_1, v_2, v_3 sono indipendenti per $t \neq -3$.
(b). Basta aggiungere a v_1, v_2, v_3 il vettore $(0, 1, 0, 0)$ per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$.
(c). Poichè $3 = dim(Ker\, f) + dim(Im\, f)$, si deve avere $dim(Im\, f) = 3$. Ciò equivale alla lineare indipendenza di v_1, v_2, v_3: dal punto (a) si deduce che deve essere $t \neq -3$.

Esercizio 4 Si vedano i testi consigliati.

Esercizio 5 (a). Dobbiamo verificare che se $\det(A) > 0$ e N è una matrice invertibile, allora $\det(N^{-1}AN) > 0$. Ma ciò segue subito dalle proprietà del determinante:

$$\det(N^{-1}AN) = \det(N^{-1})\det(A)\det(N) = \det(N)^{-1}\det(A)\det(N) = \det(A) > 0.$$

(b). φ è iniettiva: infatti (passando all'inverso), $x^{-1} = y^{-1}$ implica $x = y$; è poi suriettiva perchè , dato $x \in G$, si ha $x = \varphi(x^{-1})$.

Supponiamo G abeliano e $x, y \in G$. Allora

$$\varphi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \varphi(x)\varphi(y)$$

e φ è un omomorfismo. Viceversa, se φ è un omomorfismo, risulta $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall\, x, y \in G$, ovvero $y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ che è equivalente a $xy = yx$: dunque G è abeliano.