Prova scritta di Matematica Discreta I: Algebra, 26-9-2000

Esercizio 1. Sia $G = (\mathbb{R}^2, +)$.
(a). Provare che G è un gruppo commutativo.
(b). Si considerino in G le seguenti relazioni ρ_1, ρ_2:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)\rho_1(x_2, y_2) &\iff 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2, \\ (x_1, y_1)\rho_2(x_2, y_2) &\iff x_1x_2 > 0. \end{aligned}$$

Stabilire se ρ_1, ρ_2 sono relazioni di equivalenza.

Esercizio 2.(a). Dimostrare che, in $\mathbb{Z}_n$, risulta

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0} \implies \overline{a} = \overline{0} \text{ oppure } \overline{b} = \overline{0}$$

se e solo se n è un numero primo.
(b). Sia $G = S_6$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Determinare il sottogruppo ciclico H di G generato da g, specificando se è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. Calcolare poi g^{-1}.

Esercizio 3. Sia $W = Span\{w_1, w_2, w_3\} = \mathcal{L}\{w_1, w_2, w_3\}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a). Determinare una base $\mathcal{B}$ di W.
(b). Si ponga $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dire se u_1, u_2 appartengono a W.
(c). Estendere $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio vettoriale U_k di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(k è un parametro reale) e il sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0. \right\}.$$

(a). Determinare, al variare di k, equazioni cartesiane per U_k.
(b). Calcolare $dim(U_k \cap W)$. (Non è necessario determinare esplicitamente una base).

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 a coefficienti reali e sia W lo spazio vettoriale della matrici reali 2×2. Sia $F : V \to W$ l'applicazione lineare

$$F(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

(a). Determinare la matrice di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ in V e alla base $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ in W.

(b). Determinare $Ker(F)$ e una base di $Im(F)$.