Compito di matematica discreta I: algebra del 19-10-2000

Esercizio 1. Nel gruppo simmetrico su sette elementi S_7 si consideri la permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.
(a) Esprimere σ come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni.

(b) Sia H il sottogruppo ciclico generato da σ. Calcolare l'ordine di H e i suoi generatori.
(c) Determinare gli (eventuali) isomorfismi $H \to \mathbb{Z}_6$.

Esercizio 2. Sia A una matrice reale quadrata di ordine n.
(a) Provare che $\det(A) \neq 0$ se e solo se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $L_A(X) = AX$ è un isomorfismo.
(b) Calcolare $det(-A)$.
(c) Sia A una matrice antisimmetrica 29×29; provare che $\det(A) = 0$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate 3×3.
(a) Determinare una base del sottospazio vettoriale W delle matrici simmetriche a traccia nulla.
(b) Determinare $n \in \mathbb{N}$ per cui esiste un isomorfismo $W \to \mathbb{R}^n$ e scrivere esplicitamente un tale isomorfismo.
(c) Determinare un'applicazione lineare $F : V \to \mathbb{R}^9$ tale che $Ker(F) = W$ e $Im(F)$ è generata da $e_1, e_3, e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_9$ ($\{e_1, \dots e_9\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^9$).

Esercizio 4.(a) Enunciare (senza dimostrare) il teorema di Rouchè -Capelli.
(b) Determinare la dimensione dello spazio (affine) delle soluzioni del seguente sistema parametrico ($h, k \in \mathbb{R}$) di due equazioni in quattro indeterminate x_1, x_2, x_3, x_4:
$$\begin{cases} kx_1 + hx_2 + hx_3 = h \\ hx_2 + hx_3 = k. \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia G un gruppo.
(a). Definire l'*ordine* di un elemento $g \in G$.
(b). Provare che un elemento di G, diverso dall'elemento neutro, ha ordine 2 se e solo se coincide con il suo inverso.
(c). Supponiamo che G sia finito di ordine pari. Provare che esiste in G un elemento di ordine 2.