Esercizio 1 Si consideri il gruppo $G = (\mathbb{Z}_{3762}, +)$; si domanda:

a) giustificare l'affermazione: "G è ciclico",
b) dire quanti generatori ha G;
c) se H è un sottogruppo di G, H è ciclico? Quali sono i possibili ordini per H?
d) Dare la condizione necessaria e sufficiente affinché un elemento $\overline{a}$ di $\mathbb{Z}_{3762}$ appartenga al gruppo moltiplicativo $G' = \mathbb{U}_{3762}$ degli elementi invertibili di G;
e) dire quanti elementi ha G';
f) fra i seguenti elementi dire quali sono generatori di G e quali sono elementi di G':

$$\overline{95}, \quad \overline{1847}, \quad \overline{1843}, \quad \overline{2}, \quad \overline{1859}$$

g) se fra gli elementi precedenti ne esiste qualcuno invertibile calcolarne l'inverso.

Esercizio 2 Si considerino i seguenti due gruppi $G_1 = \mathbb{U}_7$ e $G_2 = S_3$; per tali gruppi si definiscano le seguenti applicazioni:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : G_1 & \longrightarrow & G_1, \\ x & \mapsto & x^2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \beta : G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Si dimostri che α è un omomorfismo e se ne determini il nucleo e l'immagine. Si verifichi con un controesempio che β non è un omomorfismo.

Esercizio 3 Nel gruppo simmetrico S_{12} si considerino le permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 11 & 7 & 8 & 6 & 10 & 9 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 12 & 1 & 8 & 9 & 7 & 10 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare la decomposizione in cicli disgiunti, l'ordine (il periodo) e la parità di α, β, $\alpha^2\beta$.
b) Determinare γ tale che $\beta\gamma = \alpha^2\beta$.
c) Calcolare $(\alpha^2\beta)^{847}$.
d) Determinare le strutture cicliche delle permutazioni di S_{12} aventi ordine 12 e classe dispari.

Esercizio 4 Sia G un gruppo. Dare le seguenti definizioni:

a) sottogruppo H di G;
b) ordine (periodo) di un elemento $g \in G$;
c) classe laterale sinistra di g modulo H.
d) Enunciare il teorema di Lagrange.