Esercizio 1 In $V = \mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio W formato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare basi per U e W.

(b) Determinare una base per $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

(c) Completare la base di $U + W$ determinata nella parte (b) a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2 e W lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a tre (nella variabile t) con termine noto nullo. Sia $F : V \to W$ l'applicazione lineare definita da

$$F(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) = at + at^2 + (a - b + c)t^3.$$

(a) Si verifichi che la matrice A di F rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ in V e alla base $\{t, t^2, t^3\}$ in W è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Si determinino basi per $Ker(F)$, $Im(F)$.

(c) Si deteminino autovalori e autovettori per la matrice A.

Esercizio 3 Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$.

(a) Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in V.

(b) Definire la nozione di applicazione lineare $F : V \to W$.

(c) Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Enunciare la relazione tra le dimensioni di V, $\ker(F)$, $Im(F)$.

(d) Sia S lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 3×3. Provare che non esiste un'applicazione lineare surettiva $S \to \mathbb{R}^7$.

(e) Sia S lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 3×3. Scrivere un isomorfismo $S \to \mathbb{R}^6$.