SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA
DI MATEMATICA DISCRETA I
19-10-2000

(1). (a) Risulta $\sigma = (2,4,6)(3,5) = (2,6)(2,4)(3,5)$.
(b) L'ordine di H è l'ordine di σ, che è il m.c.m. delle lunghezze dei cicli disgiunti di cui σ è prodotto. Dunque σ ha ordine 6 e $H \cong \mathbb{Z}_6$, pertanto i generatori di H sono σ e $\sigma^5 = (2,4,6)^5(3,5)^5 = (2,4,6)^2(3,5) = (2,6,4)(3,5)$.
(c) Ricordando che un isomorfismo di gruppi ciclici deve mandare generatori in generatori, si hanno due distinti isomorfismi:

$$id \mapsto \overline{0} \quad \sigma \mapsto \overline{1} \quad \sigma^2 \mapsto \overline{2} \quad \sigma^3 \mapsto \overline{3} \quad \sigma^4 \mapsto \overline{4} \quad \sigma^5 \mapsto \overline{5}$$

$$id \mapsto \overline{0} \quad \sigma \mapsto \overline{5} \quad \sigma^2 \mapsto \overline{4} \quad \sigma^3 \mapsto \overline{3} \quad \sigma^4 \mapsto \overline{2} \quad \sigma^5 \mapsto \overline{1}$$

(2). (a) Se $\det(A) \neq 0$, allora il sistema $AX = 0$ ha la sola soluzioe $X = 0$, pertanto $Ker(L_A) = \{0\}$ e L_A è iniettiva e quindi un isomorfismo, dato che dominio e codominio hanno la stessa dimensione. Il viceversa si prova invertendo il precedente argomento. Per la parte (b) si ha:

$$\det(-A) = \det(-I_n A) = \det(-I_n)\det(A) = (-1)^n \det(A).$$

(c) Se $A = -{}^tA$, si ha, usando il teorema di Binet e il risultato del punto (b):

$$\det(A) = \det(-{}^tA) = (-1)^{29}\det({}^tA) = -\det(A)$$

da cui segue $\det(A) = 0$.

(3).(a) La generica matrice di W è $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix}$, pertanto una base di W è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Poichè W ha dimensione 5, esso è isomorfo a $\mathbb{R}^5$. Detti $v_1, \ldots, v_5$ i vettori della base trovata nel punto (a), un isomorfismo $f : W \to \mathbb{R}^5$ può essere assegnato ponendo $f(v_i) = e_i$, $1 \leq i \leq 5$.
(c) Si osservi che i vettori $\{e_1, e_3, e_4, e_9\}$ formano una base di $Im(F)$. Inoltre non è difficile verificare che le matrici

$$v_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$v_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

completano $v_1, \dots, v_5$ ad una base di V.
Pertanto se poniamo

$$F(v_i) = 0_{\mathbb{R}^9},\ 1 \leq i \leq 5,\ F(v_6) = e_1, F(v_7) = e_3, F(v_8) = e_4, F(v_9) = e_9$$

il principio di estensione per linearità garantisce l'esistenza di una applicazione lineare con le proprietà volute.

(4).(a). Si vedano i testi consigliati. (b). La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} k & h & h & 0 & h \\ 0 & h & h & 0 & k \end{pmatrix}$$

Dal terema di Rouchè -Capelli si deduce che se $h \neq 0, k \neq 0$ il sistema è compatibile con ∞^2 soluzioni, poichè sia la matrice completa del sistema che la matrice dei coefficienti hanno rango 2. Sia ora $h = 0$: la matrice diviene

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Il sistema è incompatibile se $k \neq 0$ mentre per $k = 0$ entrambe le equazioni si riducono a $0 = 0$: in tal caso ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ è soluzione. Resta da discutere il caso $k = 0, h \neq 0$; la matrice diviene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè ha rango massimo, mentre la matrice dei coefficienti ha rango 1, in questo caso non ci sono soluzioni.

(5).(a) L'ordine di g è il minimo intero n tale che $g^n = e$ (se tale intero non esiste si dice che g ha ordine infinito).
(b) Se $g = g^{-1}$, allora, moltiplicando per g si ha $g^2 = e$. Poichè $g \neq e$, g ha ordine 2. Viceversa se $g^2 = e$ moltiplicando per g^{-1} si ottiene $g = g^{-1}$.
(c) Supponiamo per assurdo che G non abbia un elemento di ordine 2. Allora, per il punto (b), ogni elemento $g \neq e$ (e elemento neutro di G) è diverso dal proprio inverso. Allora gli elementi di G diversi da e formano un insieme di cardinalità pari; dunque, aggiugendo e, deduciamo che G ha ordine dispari, contraddizione.