SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA
DI MATEMATICA DISCRETA I
26-9-2000

Esercizio 1 (a) Occorre verificare che la somma $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ è associativa, commutativa e che rispetto a tale operazione esiste l'elemento neutro e ogni elemento di G ammette inverso. L'associatività e la commutatività seguono dalle analoghe proprietà della somma tra numeri reali. L'elemento neutro è $(0, 0)$; l'inverso di (x, y) è $(-x, -y)$.
(b) Occorre verificare che ρ_1, ρ_2 godono delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. La verifica di tali proprietà è banale per ρ_1 (e si riconduce a al fatto che tali proprietà valgono per la relazione di uguaglianza); ρ_2 non è invece una relazione di equivalenza perchè nonè riflessiva: $(0, y)$ non è in relazione con se stesso.

Esercizio 2 (a). Supponiamo valga la relazione nell'enunciato e che n non sia primo: allora esiste m, $1 < m < n$ che divide n, e dunque $km = n$ per qualche k. Considerando la precedente uguaglianza modulo n si ha $\overline{k} \cdot \overline{m} = \overline{0}$ con $\overline{k} \neq \overline{0}, \overline{m} \neq \overline{0}$, contraddizione. Viceversa se n è primo, ogni classe $\overline{a}, 1 < a < n$ è invertibile moltiplicativamente, cosicchè dalle relazioni $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$, moltiplicando entrambe i membri per $(\overline{a})^{-1}$, segue $\overline{b} = \overline{0}$, che è quanto si voleva.
(b). In notazione ciclica $g = (2, 3, 4)$, dunque $H = \{e, g, g^2\} = \{e, (2, 3, 4), (2, 4, 3)\}$; essendo ciclico di ordine 3, H è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$. In particolare $g^{-1} = g^2 = (2, 4, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3 (a). Si verifica facilmente che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango due, pertanto due righe non proporzionali di A sono una base di W. Si possono considerare, ad esempio, w_1, w_2.
(b). W ha equazioni cartesiane $2x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 0$, da cui di deduce subito che $u_1 \notin W, u_2 \in W$.
(c). La base cercata si ottiene considerando aggiungendo ai due vettori della base $\mathcal{B}$ un vettore non appartenente a W. Dal punto (b) si deduce che si può aggiungere u_1.

Esercizio 4 (a). Per $k \neq -1$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 3 e equazioni cartesiane per U_k si ottengono imponendo che il rango della matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2 & -2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ sia tre; ciò equivale alla condizione $\det(X) = 0$; si ottiene dunque $x_3 + x_4 = 0$. Se $k = -1$, v_3 è combinazione lineare di v_1, v_2 e equazioni cartesiane per U_k si ottengono imponendo che il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ sia due: si ottengono pertanto le equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$.

(b). Sia $k \neq -1$. Allora equazioni per $U_k \cap W$ sono $\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Pertanto

$$dim(U_k \cap W) = 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Ragionando analogamente si ha $dim(U_{-1} \cap W) = 1$.

Esercizio 5 (a) Dalle definizioni si ha

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). Ragionando direttamente, oppure osservando che la matrice trovata al punto precedente ha rango massimo tre, segue subito che F è iniettiva, dunque $Ker(F) = \{0\}$, e che $Im(F)$ è il sottospazio di W formato dalle matrici simmetriche. Pertanto una base di $Im(F)$ può essere $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.