# SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA I 18-2-2000 CANALE A-L

**Esercizio 1** (a) Occorre verificare che $\sim$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

$\sim$ è riflessiva: poichè $a + a = 2a$ basta prendere $n = a$. La proprietà simmetrica vale perchè la somma in $\mathbb{Z}$ è commutativa. Sia ora $a \sim b, b \sim c$. Allora esistono interi $r, s$ tali che $a + b = 2r$, $b + c = 2s$; dunque $a = 2r - b$, $c = 2s - b$ e pertanto $a + c = 2(r + s - b)$, cosicchè $a \sim c$. Dalla definizione di $\sim$ segue che $a \sim b$ se e solo se $a, b$ sono entrambi pari o entranbi dispari. Dunque ci sono due classi di equivalenza: gli interi pari e gli interi dispari.

(b) Risulta $\sigma = \alpha^{-1}\beta = (2,3)(1,5,6,8)(4,2)(2,3,4,7) = (1,5,6,8)(4,7)$. Una possibile scrittura di $\sigma$ come prodotto di trasposizioni è $\sigma = (1,8)(1,6)(1,5)(4,7)$, dunque $\sigma$ è una permutazione pari.

**Esercizio 2** (a) Una base di $U$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; per quanto riguarda $W$, si nota che il terzo generatore è combinazione lineare dei primi due, che sono indipendenti e dunque formano una base.

(b) Una base di $U + W$ si ottiene determinando un insieme indipendente massimale di $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Un tale insieme può essere costituito dai primi tre vettori. Poichè $dim(U + W) = 3$, dalla formula di Grassmann si ha che $dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$.

(c) Due spazi della stessa dimensione sono isomorfi, pertanto esiste un isomorfismo $F : U + W \to V$. Per costruirlo, sia $\{b_1, b_2, b_3\}$ una base di $U + W$ e si ponga $F(b_1) = 1, F(b_2) = t, f(b_3) = t^2$. Essendo definito su una base, $F$ si estende ad un'applicazione lineare $U + W \to V$ che è un isomorfismo, poichè manda una base in una base.

**Esercizio 3** (a) Risulta

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

È facile verificare che le matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ formano una base di $W$, che ha pertanto dimensione due.

(b-c) Le matrici $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ completano una qualsiasi base di $W$ ad una base di $V$. Pertanto, essendo noti i valori di $F$ su una base di $V$, esiste un unico modo di estendere $F$ ad operatore lineare su $V$ con le proprietà richieste. Fissando come base di $W$ quella trovata nel punto (a) si ha poi:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) + F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Similmente $F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pertanto

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 4** Si vedano i testi consigliati.

**Esercizio 5** (a) $N$ è normale in $G$ se le classi laterali destre coincidono con quelle sinistre: $gN = Ng \; \forall g \in G$. Allora $gNg^{-1} = N$, pertanto, fissato $n \in N$, esiste $n' \in N$ tale che $gng^{-1} = n'$ che è quanto si voleva.
(b) Proviamo che $\varphi(N)$ è un sottogruppo di $G'$: se $n'_1$, $n'_2 \in \varphi(N)$, esistono $n_1$, $n_2 \in N$ tali che $n'_1 = \varphi(n_1)$, $n'_2 = \varphi(n_2)$. Allora

$$n'_1(n'_2)^{-1} = \varphi(n_1)\left(\varphi(n_2)\right)^{-1} = \varphi(n_1)\varphi(n_2^{-1}) = \varphi(n_1 n_2^{-1}).$$

Poichè $N$ è un sottogruppo di $G$, $n_1 n_2^{-1}$ appartiene a $N$ e dunque $n'_1(n'_2)^{-1} \in \varphi(N)$: pertanto $\varphi(N)$ è un sottogruppo di $G'$. Per provare che $\varphi(N)$ è un sottogruppo normale di $G'$, in virtù della parte (a), basta provare che $g'\varphi(n)g'^{-1} \in \varphi(N)$ per ogni $g' \in G'$, $n \in N$. Per la suriettività di $\varphi$ esiste $g \in G$ tale che $\varphi(g) = g'$; dunque:

$$g'\varphi(n)g'^{-1} = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g)^{-1} = \varphi(gng^{-1}) \in \varphi(N).$$

L'ultima relazione segue dal fatto che, essendo $N$ normale in $G$, $gng^{-1} \in N$.