Esercizio 1 Sia $G = \mathbb{U}_{28}$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{28}$.
(a) Scrivere gli elementi di G e determinarne gli ordini. Dire se G è ciclico.
(b) Costruire gruppi quoziente di G di ordine 2, 3, 6 e specificare se sono ciclici.

Esercizio 2 Si consideri il gruppo simmmetrico S_5.
(a) Determinare una permutazione $\tau \in S_5$ tale che risulti $\sigma_1 = \tau\sigma_2\tau^{-1}$ ove

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Elencare le possibili strutture cicliche, e i relativi ordini, degli elementi di S_5.
(c) Determinare, se possibile, un sottogruppo di S_5 isomorfo a ciascuno dei seguenti gruppi:

$$(\mathbb{Z}_5, +), \quad (\mathbb{U}_5, \cdot), \quad (K, \cdot), \quad (S_3, \circ), \quad (\mathbb{Z}_6, +), \quad (\mathbb{Z}_7, +)$$

(K è il gruppo di Klein e $G = \mathbb{U}_5$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_5$).

Esercizio 3 Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_1 + kx_2 - x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(k è un parametro reale).

(a) Determinare il valore di k per cui F non è invertibile.
(b) Per tale valore di k determinare una base B di $Ker(F)$, una base di $\mathbb{R}^3$ contenente B, una base di $Im(F)$.
(c) Sempre per il valore di k determinato in (a), studiare la diagonalizzabilità di F.

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale V delle matrici reali quadrate 2×2 si considerino i sottospazi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{cases} a+b+c=0 \\ c+d=0 \end{cases} \right\}, \qquad U_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{cases} ka-2b+2c-d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases} \right\}.$$

(k è un parametro reale).
(a) Determinare una base di W e la dimensione di U_k al variare di k.
(b) Determinare i valori di k per cui risulta $V = W \oplus U_k$.