(1). (a) Sia $\sim$ la relazione sull'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi definita da

$$a \sim b \qquad \Longleftrightarrow \exists \quad n \in \mathbb{Z}: \quad a + b = 2n.$$

(In altri termini, $a \sim b$ se $a + b$ è pari). Provare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e determinare le classi di equivalenza.
(b) Sia $G = S_8$, il gruppo simmetrico su otto elementi.
Sia $\sigma \in S_8$ tale che $\alpha\sigma = \beta$ ove $\alpha = (1, 8, 6, 5)(2, 3)$ e $\beta = (4, 2)(2, 3, 4, 7)$. Scrivere σ come prodotto di trasposizioni e dire se σ è pari o dispari.

(2). Siano poi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 9 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare basi per U e W.
(b) Determinare una base per $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.
(c) Dire se esiste un isomorfismo tra $U + W$ e lo spazio $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2; in caso affermativo, costruire esplicitamente un tale isomorfismo

(3). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e sia W il sottospazio delle matrici simmetriche a traccia nulla.
(a) Si calcoli la dimensione di W e se ne determini una base.
(b) Si provi che esiste un unico operatore lineare $F : V \to V$ tale che $Ker(F) = W$ e che

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Si scriva la matrice di F rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

presa come base di partenza e di arrivo in V.

(4). (a). Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$.
(b). Sia W uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Si provi che un'applicazione lineare $F : V \to W$ è iniettiva se e solo se $Ker(F) = \{0\}$.
(c). Si provi che se $F : V \to W$ è un'applicazione lineare iniettiva e $v_1, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ sono linearmente indipendenti.

(5). Sia G un gruppo.
(a) Definire la nozione di sottogruppo normale G. Provare che un sottogruppo N è normale in G se e solo se, per ogni $n \in N$ e per ogni $g \in G$, $gng^{-1} \in N$.
(b) Siano G, G' gruppi e sia $\varphi : G \to G'$ un omomorfismo suriettivo di gruppi. Provare che se N è un sottogruppo normale di G, allora $\varphi(N)$ è un sottogruppo normale di G'.