CAPITOLO 1

LA MATEMATICA PRESSO I GRECI

E' indegno del nome di uomo chi ignora
il fatto che la diagonale di un quadrato è
incommensurabile con il suo lato.
Platone (*429-347 a.C.*)

1. La scuola Pitagorica (viva l'aritmetica)
Il primo organico tentativo di dare una fondazione della matematica fu probabilmente quello della scuola pitagorica il cui assunto di partenza è che:

alla base di tutto è il numero intero.

La scuola pitagorica era una setta mistico-religiosa che si sviluppò in Grecia ed in Italia (Crotone), tra il 570 ed il 500 a.C., attorno ad un mitico personaggio chiamato Pitagora. Le idee di tale scuola sono di fondamentale importanza per la storia della cultura occidentale perché da esse inizierà quel processo che trasformerà in una scienza razionale quella disarticolata raccolta di risultati dettati dall'esperienza che era la scienza pre-ellenica. Naturalmente non bisogna immaginare i pitagorici come scienziati campioni di razionalismo. Il carattere mistico di questa scuola era fortissimo, siamo in presenza di una vera e propria setta religiosa (e politica) che credeva, tra le altre cose, che le anime dei morti si reincarnassero negli animali. Anche le "regole" di tale setta ci appaiono notevolmente bizzarre. Ad esempio ecco alcuni comandamenti:

- *non toccare un gallo bianco*
- *non addentare una pagnotta intera*
- *non guardare uno specchio accanto ad un lume.*

Ma queste stranezze non tolgono ai pitagorici il merito di costituire il punto di inizio della moderna cultura scientifica. Di essi ne parla Aristotele al modo seguente, dove si deve tenere conto che allora per "numero" si intendeva "numero intero positivo".

> *Tra i primi filosofi, ..., furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per i primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri... Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero* (Aristotele, *Metafisica*).

Si deve tenere conto che in quel periodo era forte il desiderio di trovare i "principi ultimi" e che questi venivano cercati negli elementi naturali come l'aria, l'acqua o il fuoco. Forse però per capire meglio il pensiero dei Pitagorici, vediamo cosa dice uno di loro, Filolao.

> *Nessuna menzogna accolgono in sé la natura del numero e l'armonia: non è cosa loro la menzogna. La menzogna e l'invidia partecipano della natura dell'illimitato, dell'intellegibile e dell'irrazionale. Nel numero non penetra menzogna, perché la menzogna è avversa e nemica della natura, così come la verità è connaturata e propria alla specie dei numeri . . .*

> *Nulla sarebbe comprensibile, né le cose in sé né le loro relazioni, se non ci fossero il numero e la sua sostanza.*

Tutte le cose che si conoscono hanno numero: senza il numero non sarebbe possibile pensare né conoscere alcunché.

Da quel *"tutte le cose che si conoscono hanno un numero"* scaturiva poi il convincimento circa la struttura granulare e discreta delle figure geometriche e, più in generale, del mondo fisico. Ciò comportava, ad esempio, una concezione del segmento come insieme (finito) di punti-unità, punti che venivano intesi come veri e propri corpi con una determinata grandezza. Infatti era solo in base a tale ipotesi che i numeri interi potevano rappresentare lo strumento perfettamente adeguato alla descrizione della realtà, anzi, in un certo senso, venivano a coincidere con la realtà stessa. In tale modo la geometria non si considerava distinta dall'aritmetica e, in un certo senso, l'aritmetica assumeva una forma geometrica. Dei numeri infatti si dava una rappresentazione geometrica o, se si vuole, fisica, tramite una opportuna configurazione di punti-sassolino. Ad esempio si chiamavano *triangolari* i numeri che si potevano ottenere disponendo i punti in triangoli, come ad esempio

```
O      O       O         O
      O O     O O       O O
             O O O     O O O
                      O O O O
```

I Pitagorici chiamavano invece *quadrati* i numeri corrispondenti a gruppi di sassolini disposti in quadrato

```
O     O O     O O O     O O O O
      O O     O O O     O O O O
              O O O     O O O O
                        O O O O
```

L'interpretazione dei numeri come particolari disposizioni di sassolini consente di sviluppare una interessante aritmetica. Ad esempio, è immediato che ogni triangolo si ottiene dal precedente aggiungendo un fila di sassolini. Pertanto se $f(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo triangolo abbiamo che

$$f(1) = 1 \quad : f(n) = f(n\text{-}1)+n.$$

Ne segue che sono triangolari tutti i numeri della serie 1, 3, 6, 10, ... di termine generale n, cioè tutti i numeri del tipo 1+2+3+...+n. Per quanto riguarda i numeri quadrati, è immediato vedere che ogni quadrato si ottiene dal precedente aggiungendo due lati (con un sassolino in comune). Ne segue che, se $f(n)$ è il numero dei sassolini dell'ennesimo

$$f(1) = 1 \quad : f(n) = f(n\text{-}1)+2n\text{-}1.$$

Pertanto i quadrati si ottengono come elementi della serie 1, 1+3, 1+3+5, ..., 1+3+...+2n-1. Ne segue anche che ogni numero quadrato è somma di numeri dispari.

L'importanza della svolta impressa dalla scuola pitagorica non si limita alla sola matematica poiché la fede nella potenza regolarizzatrice del numero intero, il procedimento di astrazione, l'uso delle dimostrazioni nel procedere scientifico, rappresentano il nascere dell'aspetto fondamentale della cultura occidentale: il convincimento che il mondo sia comprensibile non attraverso l'ascesi mistica, la contemplazione, come viene ritenuto dalle culture orientali, ma attraverso l'attività raziocinante. Con Pitagora ha inizio un processo di idealizzazione e razionalizzazione di tutte le forme di conoscenza che dominerà perfino la nostra cultura religiosa. Afferma ad esempio Bertrand Russell in *"Storia della filosofia occidentale"* (libro che consiglio di leggere perché vivace, comprensibile ed economico):

La religione razionalistica, al contrario di quella apocalittica, è stata da Pitagora in poi (ed in particolare da Platone in poi) completamente dominata dalla matematica e dal metodo matematico. La combinazione di matematica e di teologia, che cominciò con Pitagora, caratterizzò la filosofia religiosa in Grecia, nel Medioevo e nell'era moderna fino a Kant. L'orfismo precedente a Pitagora era analogo alle misteriose religioni asiatiche. Ma, in Platone, Sant'Agostino, Tommaso d'Aquino, Cartesio, Spinosa e Leibniz, vi è un intimo intrecciarsi di religione e di ragionamento, di aspirazione morale e di ammirazione logica per ciò che è eterno, il quale viene da Pitagora e distingue la teologia intellettualizzata dell'Europa dal più diretto misticismo asiatico.

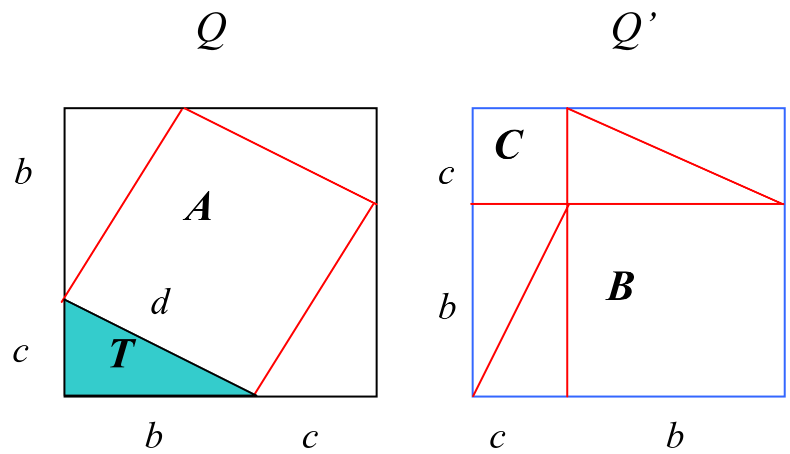
2. Crisi della scuola pitagorica (ma gli interi non bastano).

Le concezioni dei pitagorici furono però ben presto messe in crisi dalla scoperta della esistenza di grandezze geometriche "incommensurabili". Questo fatto è conseguenza del teorema che va proprio sotto il nome di "Teorema di Pitagora" (si veda anche il passo di Platone tratto da "Il Menone" che è inserito tra le letture).

Teorema 1. Dato un triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui cateti è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa.

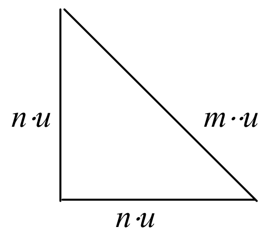
Dim. Consideriamo un qualunque triangolo rettangolo T ed indichiamo con c e b la lunghezza dei cateti e con d la lunghezza dell'ipotenusa. Prolunghiamo il cateto b con un segmento di lunghezza c ed il cateto c con un cateto di lunghezza b . In tale modo otteniamo un quadrato Q di lato $b+c$, quadrato che risulta scomposto in un quadrato A la cui misura è d^2 e da quattro triangoli rettangoli uguali a T la cui misura è $b\cdot c/2$. L'area di Q è quindi da un lato $(b+c)^2 = b^2+c^2+2bc$ e dall'altro $d^2+4(b\cdot c/2) = d^2+2\cdot b\cdot c$. Ne segue che $b^2+c^2+2bc = d^2+2\cdot b\cdot c$ e quindi cancellando in entrambi i membri $2bc$, che $b^2+c^2 = d^2$.

E' possibile anche procedure in modo "più geometrico" costruendo un quadrato Q' uguale a Q (cioè di lato b+c) e suddividendolo, come indicato nella seconda figura, nei quadrati B e C ed in quattro triangoli uguali a T. Allora dall'uguaglianza di Q con Q', sottraendo i quattro triangoli si ottiene che $\boldsymbol{A = C+B}$.



Teorema 2. Dato un quadrato, per quanto si scelga piccolo un segmento come unità di misura, le misure del lato e della diagonale non possono essere mai espresse da numeri interi.

Dim. La dimostrazione si basa sul fatto che in un quadrato perfetto ogni fattore primo è presente un numero pari di volte. Infatti se $q = n^2$ e se n ammette la scomposizione $n = p_1^{n(1)},\ldots,p_s^{n(s)}$ con $p_1,\ldots,p_s$ primi allora $q = n^2 = p_1^{2\cdot n(1)}\cdot\ldots\cdot p_s^{2\cdot n(s)}$. Ad esempio se $q = 12^2 = 144$ allora essendo $12 = 2^2\cdot 3$, sarà $q = 12^2 = 2^4\cdot 3^2$ e quindi q contiene 2 quattro volte e 3 due volte. Supponiamo ora per assurdo che esista un segmento u (unità di misura) tale che sia il lato che la diagonale siano multipli, secondo gli interi n ed m, di u. In altri termini, supponiamo che il



lato e la diagonale siano misurati tramite due numeri interi n ed m, allora per il teorema di Pitagora, dovrebbe essere $n^2 + n^2 = m^2$ e quindi $2n^2 = m^2$. Ma ciò è assurdo poiché, posto $c = 2n^2 = m^2$, dall'equazione $c = 2n^2$ si deduce che il fattore 2 è presente in c un numero dispari di volte mentre da $c = m^2$ scaturisce il fatto che il fattore 2 compare in c un numero pari di volte. Possiamo concludere pertanto che i numeri interi non costituiscono uno strumento sufficiente per effettuare misure geometriche. □

La cosa non migliora se si coinvolgono i numeri razionali. Infatti vale anche la seguente proposizione.

Teorema 3. Dato un quadrato, per quanto si scelga piccolo un segmento come unità di misura, le misure del lato e della diagonale non possono essere mai espresse da numeri razionali.

Dim. Supponiamo per assurdo che esista un segmento unitario u tale che le lunghezze del lato e della diagonale siano esprimibili tramite due razionali. Allora, detti p/m e q/m tali razionali avremmo, sempre per il teorema di Pitagora, che $2(p/m)^2 = (q/m)^2$. Da tale equazione, moltiplicando entrambi i membri per m^2, otterremo che p e q sono interi verificanti l'equazione $2p^2=q^2$. D'altra parte abbiamo già osservato che interi di tale tipo non possono esistere. □

In definitiva, in termini attuali, diremmo che perfino la misurazione di grandezze legate alla figura geometrica più elementare, il quadrato, comporta necessariamente il coinvolgimento dei numeri irrazionali. Ora, se si tiene conto del fatto che per gli antichi greci i soli numeri esistenti erano gli interi positivi, ciò significava vi sono più cose in geometria (e quindi nel mondo fisico) di quanto i numeri siano capaci di esprimere. D'altra parte, poiché la razionalità veniva identificata con il numero, una tale conclusione comportava la messa in discussione della stessa possibilità, da parte dell'uomo, di pervenire alla conoscenza. Come fosse sconvolgente per i greci una tale scoperta possiamo vederlo attraverso questo passo attribuito al filosofo Proclo Diadoco.

E' fama che colui il quale per primo rese di pubblico dominio la teoria degli irrazionali sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile sarebbero dovuti rimanere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò questo aspetto delle cosa viventi, fu trasportato al suo luogo di origine e là viene in perpetuo flagellato dalle onde.

Alla luce della scoperta di grandezze incommensurabili come il lato e la diagonale del quadrato la stessa concezione delle rette ed in generale di ogni figura geometrica come somma finita di punti-atomo, che era propria della scuola pitagorica, non poteva più reggere. Se infatti i segmenti fossero costituiti da un numero finito di particelle indivisibili, tutte di lunghezza u, allora ovviamente il lato e la diagonale del quadrato avrebbero lunghezza multiplo di u. D'altra parte si tenga presente che una tale concezione coincide proprio con quella della fisica moderna che sembra pertanto essere in contrasto con la geometria, o, per meglio dire, con il teorema di Pitagora.

Concludiamo questo paragrafo osservando che:

> se con la scuola pitagorica abbiamo il primo tentativo di fondazione generale della matematica, con la scoperta delle grandezze incommensurabili siamo in presenza della prima crisi dei fondamenti della matematica.

3. Dimostrare e dimostrare per assurdo.

Le dimostrazioni del teorema 1 e del teorema 2 del paragrafo precedente sono tra i più antichi esempi di "dimostrazione" e sono di natura molto diversa. Nel teorema 1 si dimostra una cosa in positivo, precisamente che vale una certa equazione. Questa dimostrazione consiste nel mettere in evidenza che valgono una serie di uguaglianze. La dimostrazione della incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato è invece diversa e costituisce uno dei primi esempi di *"dimostrazione per assurdo"* della storia dell'umanità. In questo caso si dimostra una cosa in negativo, cioè che non vale una affermazione. Stante l'importanza di tale tipo di dimostrazione, esaminiamo da vicino la sua struttura. Ricordiamo che chiamiamo *contraddizione* l'affermazione di un fatto e la contemporanea negazione di tale fatto. Indicando con B una asserzione, con $\neg B$ la sua negata, con $\wedge$ la congiunzione logica "e", allora una contraddizione ha una forma del tipo $B\wedge(-B)$ che si legge "B e non B". Naturalmente una contraddizione non può essere una asserzione vera, inoltre, poiché da asserzioni vere si deducono ancora asserzioni che sono vere:

se da una asserzione A segue una contraddizione, allora A è falsa.

Pertanto la struttura di una dimostrazione per assurdo di una proposizione A è questa:

- si suppone $\neg A$ e da tale ipotesi si ricava una contraddizione $B\wedge\neg B$,
- si conclude che, non potendo valere $\neg A$, vale A.

Equivalentemente possiamo scrivere

- si suppone A e da tale ipotesi si ricava una contraddizione $B\wedge\neg B$,
- si conclude che, non potendo valere A, vale $\neg A$.

Ad esempio, nel caso della dimostrazione di incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato,

- A è l'affermazione di commensurabilità,
- B è l'affermazione che in c il fattore 2 è presente un numero pari di volte
- $\neg B$ è l'affermazione che in c il fattore 2 è presente un numero dispari di volte.

La dimostrazione mostra come da A segua $B\wedge\neg B$ e permette quindi di concludere $\neg A$.

Un'altra dimostrazione per assurdo inventata dagli antichi greci è la dimostrazione per cui i numeri primi sono infiniti.

Teorema 1. L'insieme dei numeri primi è infinito.

Dim. Supponiamo per assurdo che l'insieme dei numeri primi sia finito ed indichiamo tali numeri con $p_1,...,p_n$. Poniamo $q = p_1 \cdot ... \cdot p_n+1$ è proviamo che q è primo. Se per assurdo q non fosse primo ammetterebbe un divisore primo $p_i \neq 1$. Allora poiché la differenza di due numeri divisibili per p_i è ancora un numero divisibile per p_i, avremmo l'assurdo per cui p_i è un divisore di $1 = q - p_1,...,p_n$. Una volta provato (per assurdo) che q è primo, allora basta osservare che q, essendo maggiore di tutti i numeri $p_1,...,p_n$, è diverso da tali numeri in contrasto con l'ipotesi che questi fossero *tutti* i numeri primi.

Come si vede, nella dimostrazione di questo teorema è stato utilizzato due volte il metodo di dimostrazione per assurdo. In realtà presso i greci il teorema veniva enunciato in maniera da non coinvolgere la nozione di insieme infinito al modo seguente:

Teorema 2. Per ogni numero primo p esiste un numero primo q maggiore di p.

Dim. Basta adattare la dimostrazione del teorema precedente. Infatti se indichiamo con $p_1,...p_{n-1}$ i numeri primi minori di p e poniamo $p_n = p$, allora, come abbiamo già provato, il numero $q = p_1 \cdot ... p_n +1$ è un numero primo maggiore di p.

Problema. Provare (per assurdo) il seguente "teorema":
L'equazione $x^2+2\cdot(1+x^2) = 3x^2-2$ non ammette soluzioni.

Problema. Provare (per assurdo) che la radice di due non è razionale.

Problema. Provare che la radice di un qualunque numero primo non è razionale.

4. Dopo Pitagora (viva la geometria)

Il fatto che i numeri interi si rivelassero uno strumento inadeguato a definire le grandezze geometriche poteva, da un punto di vista tecnico, essere risolto (almeno) in due modi diversi.

1. Ampliare il concetto di numero,
2. Decidere che la geometria non è riconducibile all'algebra, cioè alla nozione di numero.

I Greci seguirono la seconda via. Il primo punto di vista sarà assunto, come vedremo nel seguito, dalla matematica moderna con la definizione dei numeri reali e la successiva loro utilizzazione per la costruzione del continuo geometrico (la famosa geometria analitica). Poiché i reali si definiscono a partire dai razionali, e questi a partire dagli interi, l'attuale punto di vista sembra il naturale sviluppo di quello della scuola pitagorica. D'altra parte non è possibile definire i numeri reali senza coinvolgere la nozione di infinito attuale. Ad esempio ciò avviene quando un numero reale si definisce come un insieme attualmente infinito di razionali (si veda il metodo delle sezioni) oppure come una successione attualmente infinita di cifre decimali. Pertanto il prezzo che i greci avrebbero dovuto pagare per questa operazione è l'accettazione dell'infinito attuale. Ma gli antichi greci rifiutavano l'infinito attuale

> *. . . ché il numero è infinito in potenza, ma non in atto ... questo nostro discorso non intende sopprimere per nulla le ricerche dei matematici per il fatto che esso esclude che*

> *l'infinito per accrescimento sia tale da poter essere percorso in atto. In realtà essi stessi (i matematici), allo stato presente, non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono) ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita ...* (Aristotele).

Ancora, Aristotele (Fisica III) afferma che l'infinito è tale

> *... che si può prendere sempre qualcosa di nuovo (in esso), e ciò che si prende è sempre finito ma sempre diverso. Sicché non bisogna prendere l'infinito come un singolo essere, per esempio un uomo o una cosa, ma nel senso in cui si parla di una giornata o di una lotta, il cui modo d'essere non è una sostanza ma un processo e che, se pure è finito, è incessantemente diverso.*

La "repulsione" verso l'infinito in atto è mostrata anche dal passo sopra citato dei pitagorici in cui si afferma che la menzogna e l'invidia partecipano della natura dell'illimitato, dell'intellegibile e dell'irrazionale.
I matematici greci seguirono allora la seconda via, convincendosi che:
<u>la geometria è una scienza autonoma dalla aritmetica, in un certo senso la più importante tra le scienze.</u>
D'altra parte in loro era totale la convinzione che gli unici numeri esistenti fossero i numeri naturali cioè gli interi positivi. Gli stessi numeri razionali erano considerati a volte come operatori, a volte come relazioni tra grandezze. Ad esempio quello che per noi è il numero 3/4, per i greci non era un ente matematico in qualche modo esistente ma solo un modo abbreviato per dire "prendi un grandezza, moltiplicala per 3 e dividila per 4"). Se volessimo tradurre in termini attuali questo punto i vista diremmo che i numeri razionali sono funzioni (non ovunque definite) di N in N. Altre volte 3/4 stava ad indicare un certa relazione tra due grandezze, infatti aveva senso scrivere, date due grandezze omogenee a e b, che a e b sono nella proporzione di 3 a 4, in breve $a:b = 3:4$ (si veda la teoria delle proporzioni). Un tale rifiuto dei razionali si traduceva poi nell'impossibilità di effettuare le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione. Infatti sembrava difficile giustificare l' addizione o la moltiplicazione di operazioni o di due relazioni.
A maggior ragione per i greci era inconcepibile una teoria degli irrazionali come quella attuale. Se non altro perché essa, presupponendo l'accettazione dell'infinito attuale, sarebbe stata in netto contrasto con i loro convincimenti filosofici. Essi avevano però una tecnica, la teoria delle grandezze omogenee, che, come vedremo, permetteva ugualmente di esprimere quei concetti che, per i matematici moderni, coinvolgono gli irrazionali.

5. Caratteri della geometria greca: idealizzazione degli enti matematici.
Come abbiamo già detto, dalla scoperta delle grandezze incommensurabili in poi la geometria assume un ruolo centrale nella conoscenza scientifica e filosofica dell'antica Grecia. Essa ha uno sviluppo che appare enorme se lo si confronta con le altre branche della conoscenza. Per rendersene conto basta pensare che la geometria che si impara a scuola è solo una piccolissima parte della geometria scoperta di greci (se si esclude la geometria analitica che è una scoperta relativamente recente). Al contrario, gli argomenti di fisica, chimica, biologia che fanno parte dei programmi scolastici sono enormemente superiori per quantità e qualità a quelli che la persona più istruita dell'antica Grecia poteva possedere. Esaminiamo gli aspetti più rilevanti della geometria dei Greci e partiamo da quello sicuramente più importante: l'idealizzazione degli enti geometrici.
<u>Primo processo di idealizzazione.</u> Un primo processo di idealizzazione consiste nel dare carattere di "sostanza" a quelle che prima erano considerate proprietà della materia. Se nella

matematica pre-ellenica "essere quadrato" era un attributo di alcuni oggetti materiali, non diverso da "essere rosso", "essere pesante", nel seguito si perverrà ad un nuovo ente "il quadrato" che a tutti gli effetti verrà trattato come una sostanza individuale, un oggetto di cui è possibile lo studio allo stesso modo di come sono da studiare le cose esistenti in natura. Ciò si manifesterà, da un punto di vista grammaticale, nella trasformazione del ruolo di parole come "quadrato", "punto", "segmento" che da attributi divengono soggetti. Così a frasi del tipo "quel tavolo è un quadrato", che pongono in relazione un ente materiale (quel tavolo) con una sua possibile proprietà (essere quadrato) che appartengono, per così dire, alla fisica, si vengono sostituendo espressioni del tipo "il quadrato ha le diagonali uguali". Tali espressioni pongono in relazione enti e proprietà ideali e la loro validità, non potendo dipendere dalla esperienza del mondo esterno, può essere stabilita solo all'interno di una organizzazione razionale delle conoscenze.

<u>Secondo processo di idealizzazione.</u> Un secondo processo di idealizzazione è strettamente legato alla scoperta delle grandezze incommensurabili. Come abbiamo visto, ci si era accorti che un segmento non può essere costituito da una sequenza finita di punti materiali come pretendevano i pitagorici. D'altra parte se un segmento contiene quanti punti si vuole, allora tali punti devono necessariamente avere lunghezza nulla. Infatti, se per assurdo tutti i punti avessero grandezza l allora il segmento in questione dovrebbe avere lunghezza pari alla somma di infinite volte l e cioè dovrebbe avere lunghezza infinita. In conclusione,

<u>i punti devono essere enti senza grandezza,</u>

e, per analoghe considerazioni,

<u>le linee devono essere enti senza larghezza e le superfici enti senza spessore.</u>

La idealizzazione degli enti geometrici assume allora un aspetto radicale, in quanto nel mondo reale ogni cosa ha lunghezza, larghezza e spessore. Naturalmente anche tutti gli altri enti geometrici come la sfera, il cubo, il cilindro sono astratti: non sarà mai possibile trovare in natura o costruire un corpo perfettamente sferico. Ma mentre il supporre l'esistenza di un corpo perfettamente sferico non sembra crearci grandi problemi, il supporre l'esistenza di qualcosa, il punto, che sia senza dimensioni è in completo contrasto con la concezione che abbiamo della materia. Siamo in presenza di un più alto livello di astrazione.

In definitiva

- la concezione del punto come ente senza dimensioni appariva come logica conseguenza della scoperta degli incommensurabili
- i punti (più in generale, le linee, le superfici) non appartengono al mondo reale.

La conclusione a cui si doveva allora necessariamente pervenire era che:

<u>si può avere conoscenza solo del mondo delle idee</u>

Il mondo percepito attraverso i sensi è qualcosa di illusorio al quale spetta solo il compito di "assomigliare" al mondo delle idee, così come un granello di sabbia può solo assomigliare ad un punto, non essere un punto. Un tale punto di vista assumerà la sua forma più compiuta nelle teorie filosofiche di Platone e sarà una delle cause dello scarsissimo sviluppo della fisica presso i Greci. Vediamo cosa dice Platone:

> *I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui quelle sono immagini, ragionando sul quadrato in sé e sulla diagonale in sé, e non su quella che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure, che essi modellano e disegnano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre e di immagini riflesse nelle acque) cercando di vedere i veri enti che non si possono vedere se non col pensiero* (Platone).

E' da notare che è il mondo reale ad essere una immagine (sbiadita) del mondo delle idee e non il contrario, come saremmo portati a pensare ora.

Ma come essere sicuri della validità di una asserzione geometrica dal momento che la sua verifica non può essere sperimentale? I greci osservarono che di alcune asserzioni si ha una intuizione talmente immediata che tutti sono d'accordo sulla loro validità. Un esempio di tale tipo è *"per due punti distinti passa una sola retta"*.
Vi sono però asserzioni, come il teorema di Pitagora, la cui validità non sembra essere altrettanto immediata. L'unica possibilità appariva allora quella di ricavare, tramite opportuni ragionamenti, le asserzioni più complesse da un gruppo prefissato di asserzioni sulla cui validità ci fosse una accordo generale: tali asserzioni venivano chiamate in alcuni casi postulati, in altri assiomi. Nasce in tale modo il metodo assiomatico che troverà negli elementi di Euclide la sua applicazione più bella e completa.

6. Gli elementi di Euclide.
Gli "Elementi" di Euclide rappresentano forse la tappa più importante dello sviluppo del pensiero scientifico moderno. L'opera, che consiste in 13 libri, fu composta da Euclide verso il 300 a.C. e rappresenta una organica esposizione di buona parte della matematica preesistente. Di questi libri i primi sei sono dedicati alla geometria piana, il settimo, l'ottavo, il nono ed il decimo sono di natura aritmetica, i rimanenti trattano di geometria solida.
Si inizia con una serie di definizioni, le prime quattro sono:

1. *Il punto è ciò che non ha parti*
2. *Una linea è una lunghezza senza larghezza*
3. *Estremi di una linea sono punti*
4. *Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.*

Una critica che si potrebbe fare a tali definizioni è che rimandano il concetto da definire ad altri concetti che non si sono definiti. Infatti per definire il punto si ricorre alla nozione di "parte", nella definizione 2 si utilizzano le nozioni di "lunghezza" e "larghezza", nella definizione 3 inoltre si usa la parola "estremi", infine è alquanto oscuro che cosa significhi "giacere ugualmente". Invece attualmente una definizione viene fatta solo in funzione di nozioni già definite. Ad esempio data una struttura algebrica, un suo elemento e viene chiamato "elemento neutro" se risulta $x{\cdot}e=x$ e $e{\cdot}x=x$ per ogni elemento x. Tale definizione è ragionevole poiché utilizza solo la nozione di prodotto il quale, per il fatto che partiamo da una struttura algebrica data, risulta essere stata già definita. Tali critiche sarebbero però ingiustificate perché per i greci le definizioni avevano un significato completamente diverso da quello attuale. Il loro ruolo (in un certo senso precedente ed esterno alla elaborazione scientifica) era quello di indicare, in qualche modo, enti che si riteneva avessero una esistenza propria e di cui ogni uomo ha una idea chiara. Prima di cominciare una trattazione scientifica di tali oggetti era infatti necessario, per potersi capire, essere sicuri che si stava parlando delle stesse cose. Ad esempio la definizione 3 ci serve per capire che il termine "linea retta" significava quello che ora chiamiamo "segmento" e non ciò che oggi si intende per retta. In proposito possiamo parlare anche di definizioni reali nel senso che sono simili alle descrizioni-indicazioni che facciamo a volte di un oggetto esistente e conosciuto sia da noi che dalla persona con cui parliamo. Così "il punto è ciò che non ha parti" è una definizione allo stesso modo per cui lo è, ad esempio, "la penna di cui intendo parlare è quella posata sul tavolo". *A* volte si parla anche di definizioni ostensive per esprimere il fatto che esse servono solo ad indicare, a mostrare l'oggetto di cui si parla. D'altra parte, quando nella teoria degli insiemi il professore dice che un insieme è una "collezione", un "aggregato" di elementi, egli si comporta in modo analogo a quello di Euclide perché non ha spiegato cosa si debba intendere per aggregato o collezione.
Il punto di vista attuale, come vedremo quando esamineremo il metodo assiomatico, è totalmente diverso. Non si definisce ciascun ente isolatamente ma una intera classe di strutture ciascuna costituita da elementi matematici. Ad esempio non si propone una

definizione di punto e di retta, piuttosto si definiscono delle strutture chiamate "spazi geometrici" i cui elementi base sono punti e rette. Oppure, le definizioni hanno il ruolo di indicare particolari elementi di una data struttura. Ad esempio, in algebra, abbiamo sia la definizione di che cosa si debba intendere, ad esempio, per gruppo, sia, all'interno di una data struttura algebrica, la definizione di che cosa sia un elemento neutro.
Negli Elementi di Euclide abbiamo poi una serie di *nozioni comuni* (chiamate dai matematici posteriori *assiomi*) tra cui:

- *cose che sono uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro*
- *cose che coincidono tra loro sono uguali*
- *se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.*
- *se cose uguali sono addizionate a cose diseguali le totalità sono disuguali*
- *il tutto è maggiore della parte.*

La proprietà simmetrica per cui se $A = B$ allora $B = A$ viene data per scontata e non esplicitata. Il primo assioma dice che la uguaglianza è una relazione transitiva. Infatti afferma che da $A = C$ e $C = B$ segue che $A = B$. Il secondo assioma esprime la proprietà riflessiva e con questo ci si assicura che l'uguaglianza è una relazione di equivalenza. Il terzo assioma dice che l'eguaglianza è quella che attualmente viene chiamata una congruenza, cioè una relazione di equivalenza compatibile con la struttura matematica che si considera (in questo caso la struttura additiva). Da notare che l'esigenza di affermare che cose che coincidono sono uguali mostra che l'uguaglianza non coincide in generale con l'identità, cioè che possono esistere cose uguali ma non identiche. D'altra parte due triangoli vengono definiti uguali se hanno lati uguali. Quindi due triangoli possono essere uguali senza coincidere (in quanto stanno in parti diverse del piano).
Seguono infine i cinque *postulati*:

I *Risulti postulato che si possa condurre una linea retta da una qualsiasi punto ad ogni altro punto.*

II *e che una retta finita si possa prolungare continuamente in linea retta*

III *e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza*

IV *e che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro*

V *e che, se una retta venendo a cadere su due rette forma due angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

Il quinto postulato è noto come "assioma delle parallele" e, come vedremo, giocherà un ruolo importante nello sviluppo del pensiero matematico. Le nozioni comuni, si differenziano dai postulati per il fatto di essere nozioni che non appartengono esclusivamente alla geometria ma a tutte le scienze. In un certo senso, pertanto, esse hanno un grado di certezza maggiore dei postulati. Di questi ultimi non si pretende di affermare la validità universale, piuttosto si "chiede" (e da ciò deriva il termine "postulato") al proprio interlocutore una loro accettazione per poter rendere possibile la successiva trattazione. Da notare che attualmente i matematici non fanno questa distinzione e ricorrono al termine "assioma" sia per indicare i postulati che le nozioni comuni.
Osserviamo come nei postulati si sia evitato sempre accuratamente il ricorso ad enti infiniti o illimitati, cioè all'infinito attuale. Così al posto di quelle che per noi sono le rette illimitate si preferisce fare riferimento ai segmenti. La illimitatezza (attuale) della retta si traduce, nel secondo postulato, nella indefinita prolungabilità dei segmenti, e lo stesso quinto postulato si riferisce a prolungamenti di segmenti. Non si deve poi pensare che i segmenti venissero considerati come oggetti infiniti (insiemi infiniti di punti). Infatti se è vero che dagli assiomi di Euclide è possibile dedurre che in ogni segmento giacciono "quanti punti si vuole", per i matematici greci questo non significava che un segmento è un insieme infinito di punti.

Piuttosto segmenti e punti erano enti completamente indipendenti tra i quali sussisteva o meno una relazione di "giacenza" da non confondersi in nessun modo con l'attuale relazione di appartenenza della teoria degli insiemi. Il fatto che, dato un segmento, se si trovano n punti giacenti in esso si possibile trovarne anche $n+1$ non comporta l'accettazione dell'infinito attuale più di quanto lo comporti il fatto che, dato il numero intero n esista anche il numero $n+1$.
Una ultima osservazione circa i postulati riguarda il loro carattere costruttivo. Si vede infatti chiaramente come essi siano corrispondenti ad operazioni che un disegnatore può eseguire, come il tracciare rette e cerchi. Fa eccezione forse il quinto postulato perché se la somma dei due angoli interni è minore di due retti solo per una quantità piccolissima, il verificare che le due rette in questione si incontrano comporta la necessità di tracciare segmenti più lunghi di quanto l'uomo è in grado di fare. Potremmo anche dire che, mentre i primi postulati consentono di costruire, a partire da enti "a portata di mano" ancora enti "a portata di mano", il quinto assioma non verifica tale fatto. Per questi motivi, o forse anche per altri, il quinto postulato veniva accettato malvolentieri tanto che i matematici che da Euclide fino alla prima metà dell'ottocento cercarono costantemente di provare tale postulato a partire dai precedenti. Si deve comunque sottolineare che non veniva messo in discussione il fatto che tale postulato fosse vero. Solo che, per questioni di correttezza scientifica e di eleganza sarebbe stato opportuno ricorrere solo a postulati totalmente evidenti.
Il quinto postulato attualmente viene sostituito dal postulato

data una retta r ed un punto P fuori da essa esiste al più una retta per P parallela ad r

che si prova essere equivalente. Si tenga presente che l'esistenza della retta parallela può essere dimostrata a partire dai rimanenti postulati.

7. La teoria delle grandezze omogenee.

La teoria delle grandezze omogenee e la conseguente teoria delle proporzioni, si trovano esposte nel libro V degli *Elementi* di Euclide anche se tale teoria, almeno nella sua parte essenziale, viene attribuita a Eudosso di Cnido, vissuto pochi decenni prima di Euclide. Essa è l'analogo della definizione assiomatica della struttura ordinata dei numeri reali positivi con la relativa somma che vedremo nel capitolo 4. Noi non ci atterremo scrupolosamente alla teoria di Euclide, preferendo riformularla in termini più moderni.

Cominciamo con la definizione di grandezze omogenee o, per meglio dire, di classe di grandezze omogenee. Euclide non spiega che cosa intenda per grandezze omogenee ma assume che in una classe di grandezze omogenee siano definite le nozioni di uguaglianza, di ordine e di addizione. In termini attuali daremmo la seguente definizione.

Definizione 1. Una *classe di grandezze omogenee* è una struttura di tipo $(G,=,<,+)$, con $=$ uguaglianza, $<$ relazione binaria e $+$ operazione binaria, verificante gli assiomi

$A1$ la relazione $=$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

$A2$ $<$ è una relazione d'ordine stretto totale compatibile con l'operazione di somma.

$A3$ la somma è commutativa ed associativa.

$A4$ per ogni $a \in G$ e per ogni $n \in N$ esiste $u \in G$ tale che $n \cdot u = a$ (assioma della divisibilità).

La classe dei numeri naturali soddisfa i primi tre assiomi ma non il quarto. Esempi di classe di grandezze omogenee sono i seguenti:
- La classe dei razionali positivi
- La classe dei reali positivi
- L'insieme dei segmenti appartenenti ad una retta (rispetto ad una ovvia definizione di somma di segmenti, di ordinamento di segmenti e di uguaglianza tra segmenti).

- L'insieme dei pesi di una bilancia se si accetta che di ogni peso esistano anche i suoi sottomultipli e che di ogni tipo di peso si abbiano a disposizione quante copie si vogliano.
Di particolare importanza è il *Postulato di Archimede* che presenta un interesse notevole anche nella matematica moderna.

Postulato di Archimede. Siano u e b due grandezze omogenee con $u < b$, allora esiste un intero m tale che $m \cdot u > b$.

Classe di grandezze omogenee e misura. Il sistema di assiomi che abbiamo elencato hanno lo scopo di rendere possibile una misurazione di una grandezza b rispetto ad una unità di misura u qualunque. Ad esempio assumiamo che u sia un regolo lungo un decimetro e che vogliamo misurare un segmento b. Allora la presenza di una operazione di somma consente di effettuare multipli $1 \cdot u$, $2 \cdot u$, ...,$m \cdot u$ di u cioè di riportare più volte consecutivamente u. Allo stesso momento, utilizzando il fatto che in una classe di grandezze omogenee è definita una uguaglianza ed un ordine stretto, possiamo man mano verificare se il multiplo $m \cdot u$ sia uguale o minore a b. Ad un certo momento è possibile che si ottenga un multiplo $m \cdot u$ di u coincidente proprio con b. In questo caso "fortunato" diremo che *m è la misura di b rispetto all'unità di misura u*. Se ciò non accade, allora per il Postulato di Archimede ad un certo punto si finisce comunque col *superare b*. Esiste cioè un numero m tale che $(m\text{-}1) \cdot u < b < m \cdot u$. Allora possiamo assumere i numeri m-1 ed m rispettivamente come *misura per difetto* e *misura per eccesso* di b rispetto a u. Se poi vogliamo ottenere una misura migliore, possiamo sostituire u un suo sottomultiplo ad esempio porre $u' = u/10$ uguale al centimetro, cosa questa che l'assioma di divisibilità consente di fare. In questo caso, se esiste un intero m tale che $m \cdot u' = b$, cioè tale che $(m/10) \cdot u = b$ diciamo che *la misura di b rispetto a u è il numero razionale m*/10. Altrimenti, detto m un intero tale che $(m\text{-}1) \cdot u' < b < m \cdot u'$ cioè tale che $((m\text{-}1)/10) \cdot u < b < (m/10) \cdot u$ diremo che b ha *come misura per difetto* il razionale $(m\text{-}1)/10$ e *misura per eccesso* il razionale $m/10$. Quest'ultimo passaggio comunque non veniva esplicitato dai greci in quanto i razionali non erano accettati. Se si vogliono misure più precise si procede poi dividendo il segmento u' in ulteriori 10 parti ottenendo un regolo di un millimetro e così via.

Non cambia il procedimento se invece che misure di segmenti si tratta di pesare oggetti. Se b è l'oggetto da pesare ed u (*il grammo*) un oggetto che funge da una unità di misura, allora si procede in questo modo. Si mette b in un piatto B ed ovviamente B si abbassa. Nel frattempo sull'altro piatto A si mettono man mano dei pesi uguali ad u. Se dopo avere messo m pesi uguali ad u la bilancia si equilibra, allora possiamo concludere che la misura di b rispetto ad u è esattamente m. In caso contrario ad un certo momento (assioma di Archimede) il piatto B si alza e possiamo concludere che il numero m dei pesi messi in A è una misura per eccesso di b, mentre m-1 ne è una misura per difetto. Utilizzando sottomultipli di u si possono ottenere delle pesate più precise.

Una classe non archimedea. Tutti gli esempi numerici precedenti verificano l'assioma di Archimede. Per dare una idea di un comportamento non euclideo, consideriamo la classe R^R delle funzioni di R in R, e definiamo la somma e l'ordinamento in modo usuale. In tale modello è subito visto che l'assioma di Archimede non è verificato. Infatti sia f una funzione limitata e g una funzione non limitata. Allora tutti i multipli di f sono ancora limitati e quindi non può esistere un multiplo di f maggiore di g. Il fatto che tale tipo di struttura non è archimedea comporta che non è possibile misurare le funzioni utilizzando una funzione come unità di misura come invece è possibile fare per i segmenti.

Da notare che in questo caso sono verificati tutti gli assiomi per le classi di grandezze omogenee tranne il fatto che l'ordinamento non è totale. Un esempio migliore di struttura non archimedea è quello dei razionali non standard che sarà considerato nel seguito.

Un altro assioma fondamentale è quello della continuità che afferma, in un certo senso, che non esistono "buchi" in una classe di grandezze omogenee. Esso comunque, pur essendo continuamente utilizzato, non fu mai enunciato esplicitamente da Euclide e nemmeno da tutti i matematici successivi. Bisogna aspettare Dedekind nel 1872, per avere una sua esplicita formulazione.

Definizione 2. Chiameremo *separati* due sottoinsiemi A e B di una classe di grandezze omogenee se ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B. Un *elemento di separazione* è un elemento che è maggiorante di A e minorante di B.

Assioma di continuità. Ogni coppia A e B di insiemi separati ammette un elemento di separazione.

Si osservi che tale assioma non è verificato dalla classe Q^+ dei numeri razionali positivi. Infatti è possibile provare che le due classi $A = \{r \in Q^+ \mid r^2 < 2\}$ e $B = \{r \in Q^+ \mid r^2 > 2\}$ sono separate ma che non esiste nessun razionale q che sia elemento di separazione.

Per fare un esempio di applicazione di tale assioma, consideriamo il seguente problema:

data una circonferenza C trovare un segmento la cui lunghezza sia uguale a quella di C.

Allora posso considerare l'insieme A dei segmenti che si ottengono inscrivendo una poligonale in C e poi "raddrizzandola" (l'insieme dei segmenti la cui lunghezza è uguale alla lunghezza di una poligonale inscritta). L'insieme B viene definito come l'insieme dei segmenti la cui lunghezza si ottiene "raddrizzando" una poligonale circoscritta (l'insieme dei segmenti la cui lunghezza è uguale alla lunghezza di una poligonale inscritta). Allora A e B sono due classi separate e pertanto esiste un segmento che separa tali classi. <u>Tale segmento rappresenta il segmento la cui la lunghezza è uguale a quella della circonferenza.</u>

Definizione 4. Due grandezze omogenee a e b si dicono *commensurabili* se esistono due interi n ed m tali che $n \cdot a = m \cdot b$.

In termini moderni noi diremmo che a e b sono commensurabili se a = $(m/n)b$, ma i Greci come abbiamo già osservato, non potevano fare riferimento ai razionali. Quello che è per noi il numero razionale m/n rappresentava per loro una relazione che doveva essere espressa, se si voleva mantenere il dovuto rigore, solo in termini di interi tramite l'uguaglianza $n \cdot a = m \cdot b$. Ad esempio Euclide nei suoi Elementi afferma che

un rapporto è una sorta di relazione tra dimensioni di due grandezze della stessa specie.

Proposizione 5. Due grandezze sono commensurabili se e solo se hanno un sottomultiplo in comune cioè se le loro grandezze possono essere espresse da numeri interi rispetto ad una opportuna unità di misura.

Dim. Siano a e b commensurabili e quindi siano n ed m due naturali tali che $n \cdot a = m \cdot b$. Sia u tale che $m \cdot u = a$ allora risulta che $nmu = mb$ e quindi $b = nu$. Ciò significa che u è un sottomultiplo sia di a che di b. Viceversa sia u tale che, per opportuni n ed m, $mu = a$ e $nu = b$, allora $nmu = na$ e $mnu = mb$ e quindi $na = mb$. □

Come abbiamo già osservato, il lato del quadrato e la sua diagonale costituiscono esempi di grandezze incommensurabili.

Si passa poi alla definizione della nozione di proporzionalità tra quattro grandezze. Anche in questo caso si utilizza solo la nozione di multiplo e non quella di divisione. Ora se attualmente volessimo esprimere il fatto che quattro grandezze a, b, c, d (che in generale possono essere non razionali) sono in proporzione, cioè che il numero reale $a : b$ è uguale al numero reale c:d, potremmo farlo ricorrendo solo ai razionali dicendo che
- un razionale n/m è minore di a:b se e solo se è minore di c:d
- un razionale n/m è maggiore di a:b se e solo se è maggiore di c:d.

D'altra parte possiamo riscrivere tali equivalenze facendo uso solo dei numeri interi dicendo che:
- $nb \leq ma$ se e solo se $nd \leq mc$
- $nb \geq ma$ se e solo se $nd \geq mc$.

Ciò suggerisce la seguente definizione (due o più grandezze vengono chiamate omogenee tra loro se appartengono alla stessa classe di grandezze omogenee).

Definizione 6. Siano a, b, c, d quattro grandezze con a omogeneo a b e c omogeneo a d. Diremo che tali grandezze *sono in proporzione* e scriveremo a:b = c:d se per ogni coppia di interi n, m risulta che

$$nb \leq ma \Leftrightarrow nd \leq mc \quad \text{e} \quad nb \geq ma \Leftrightarrow nd \geq mc.$$

Si noti che non è necessario che le quattro grandezze siano omogenee tra loro, è sufficiente assumere che a sia omogenea a b e c a d; cioè che a e b appartengano ad una stessa classe di grandezze omogenee e c e d ad un'altra classe di grandezze omogenee. Ad esempio è possibile parlare di proporzione anche nel caso in cui a e b sono lunghezze e c e d aree.
Da osservare che l'uso dell'uguaglianza nell'espressione a:b = c:d, non deve far ritenere che i Greci ritenessero che a:b e e c:d fossero "oggetti" uguali. Infatti a e b non sono da considerare numeri reali di cui si effettua la divisione e quindi a:b da solo non denota niente. La equazione a:b = c:d era considerata come un modo per indicare una relazione tra quattro grandezze e non una uguaglianza. Il segno di uguaglianza può verificarsi soltanto nel caso di coppie di grandezze commensurabili che sono le uniche che ammettono multipli comuni. Tuttavia sembra che Euclide consideri una scrittura del genere anche come una sorta di affermazione per cui la coppia (a,b) ha qualcosa in comune con la coppia (c,d) (si veda la nota successiva).

Proposizione 7. Per l'uguaglianza dei rapporti valgono le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva (cioè è una relazione di equivalenza tra coppie).

Dim. La proprietà riflessiva e quella simmetrica sono evidenti. Per provare la proprietà transitiva siano a, b, c, d, e, f sei grandezze diverse tra loro, vogliamo provare che

$$a : b = c:d \quad \text{e} \quad c:d = e:f \;\Rightarrow\; a:b = e:f.$$

A tale scopo supponiamo che $ma \leq nb$ allora per la prima proporzione $mc \leq nd$ e per la seconda proporzione si ha che da $mc \leq nd$ segue che $me \leq nf$. Quindi per ogni m,n in N abbiamo che se $ma \leq nb \Rightarrow me \leq nf$. Similmente si prova che $ma \geq nb \Rightarrow m \cdot e \geq n \cdot f$ e ciò prova che a:b = e:f.

Nota. Il fatto che nella proposizione precedente siano state verificate le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva induce a considerare una nuova classe di oggetti che in termini moderni costruiremmo al modo seguente. Data una classe G di grandezze omogenee definiamo in $G \times G$ la relazione $\equiv$ ponendo $(a,b) \equiv (c,d)$ se le quattro grandezze a, b, c, d sono in proporzione. Abbiamo visto che una tale relazione è di equivalenza e quindi che ripartisce $G \times G$ in classi di equivalenza. Possiamo chiamare *rapporto* una classe completa di equivalenza. In questo modo è lecito dire che le due classi a e b hanno lo stesso rapporto per dire che appartengono alla stessa classe di equivalenza. In altri termini l'espressione $a{:}b = c{:}d$ rappresenta una equivalenza tra coppie o, se si vuole, una uguaglianza tra classi di equivalenza.

Enunciamo ora il teorema di esistenza del quarto proporzionale.

Teorema 8. (Teorema di esistenza del quarto proporzionale). Siano a,b due grandezze appartenenti alla classe M di grandezze omogenee, e c una grandezza appartenente alla classe N, allora esiste una grandezza $x \in N$ tale che $a{:}b=c{:}x$.

Il teorema di esistenza del quarto proporzionale equivale all'affermazione che il prodotto e la divisione sono definite nella classe delle grandezze omogenee. Infatti, considerando il caso $a = 1$, $1{:}b = c{:}x$ equivale a dire che (con il linguaggio attuale della teoria dei numeri reali) $x = b \cdot c$. Se si pone $b = 1$ allora $a:1 = c{:}x$ equivale a dire che $c = ax$.

8. Contro i matematici.
Quando ho detto che la matematica giocava un ruolo centrale nella cultura dei greci non intendevo dire che ciò accadeva per tutti i greci. In realtà, essendo gli antichi greci un popolo notevolmente intelligente, vivace e non conformista, accadeva che su di un dato argomento ciascuno aveva una sua idea personale. Così sulla matematica non tutte le opinioni erano concordi e lo stesso Aristotele non era convinto della importanza della matematica allo stesso modo di Platone.

Uno di quelli che meno avevano in simpatia la matematica era Sesto Empirico, un filosofo vissuto attorno al 180 dopo Cristo. Nel suo libro "Contro i geometri" egli critica in maniera radicale l'opera dei matematici. Ad esempio critica le basi logiche del metodo ipotetico deduttivo di Euclide e precisamente la validità di un tale metodo come strumento per ottenere verità sul mondo. Infatti per Sesto Empirico il valore conoscitivo di un sistema ipotetico-deduttivo non può stare nelle ipotesi (cioè nei postulati) in quanto o una asserzione è vera, ed allora non ha senso considerarla come ipotesi, oppure è falsa ed allora è sbagliato prenderla come ipotesi.

. . . la cosa ammessa per ipotesi o è vera e tale come noi la supponiamo, o è falsa. Ma se essa è vera, noi non la postuliamo, perché non sentiamo il bisogno di ricorrere ad una cosa piena di sospetto quale è l'ipotesi, ma l'assumiamo immediatamente, giacché nessuno assume ipoteticamente le cose vere ed esistenti, quali ad esempio il fatto che adesso è giorno ed io sto discutendo e respirando . . . Se però essa non è tale, ma è falsa, non si ricava alcun vantaggio dell'ipotesi . . .

Si potrebbe allora dire che il valore di un sistema ipotetico deduttivo stia nella validità delle conseguenze che se ne ricavano.

Ma, per Zeus, essi (i matematici) dicono, se quello che consegue all'ipotesi si scopre essere vero, senz'altro saranno vere anche le cose assunte in via ipotetica, ossia le cose cui quelle vere conseguono.

Questo è il punto di vista della fisica moderna; nessun fisico pensa che le leggi generali di una teoria fisica siano direttamente verificabili o applicabili. Piuttosto si considera come una conferma della validità di una teoria fisica il fatto che le conseguenze di tale teoria siano state verificate. Ad esempio, se ci si riferisce ai principi della dinamica classica di Newton, allora una prova di tali principi è stata vista nella loro capacità di prevedere il moto dei pianeti non nel fatto che siano stati effettuati esperimenti di laboratorio capaci di verificarli. In breve, nella fisica si procede stabilendo una serie di assunzioni (che possiamo chiamare leggi, ipotesi, assunzioni, postulati, assiomi) che in generale non sono di per se stesse verificabili o utili, poi da queste assunzioni si ricavano altre assunzioni (i teoremi) che possono essere assoggettate ad una verifica. Se tali teoremi dopo la verifica risultano veri allora si dirà che la teoria è valida. La struttura di tale modo di procedere è la seguente

da B e $A \Rightarrow B$ segue A;

e non deve essere confusa con la regola di Modus Ponens che invece ha la struttura

da A e $A \Rightarrow B$ segue B;.

Ma ciò che viene considerato soddisfacente dai moderni scienziati non soddisfa invece Sesto che, giustamente, osserva che dal fatto che da alcune ipotesi si siano tratte conseguenze vere non si può dedurre che tali ipotesi siano vere.

Ebbene, anche una tale affermazione risulta ancora semplicistica . . . se il conseguente è vero, non per questo è tale anche il precedente . . . come al fatto che la terra vola (*il ché è falso*) *consegue che la terra esiste* (*il ché è vero*).

A parte l'infelice scelta dell'esempio (sappiamo adesso che la terra vola), Sesto aveva ragione. Ad esempio dalla equazione 2=5 moltiplicando entrambi i membri per zero si ricava che 0×2=0×5 cioè che 0=0. Pertanto abbiamo un esempio in cui l'implicazione $2=5 \Rightarrow 0=0$ è vera la conseguenza 0=0 è vera ma l'ipotesi 2=5 è falsa. D'altra parte vi sono moltissimi esempi di teorie che con il tempo si sono dimostrate false ma che hanno prodotto teoremi veri. Un caso è dato dalla teoria degli insiemi che ha prodotto molti ed utili teoremi nonostante che la scoperta dei paradossi abbia dimostrato la sua falsità. D'altra parte ogni teoria fisica è stata dimostrata essere falsa dalla teoria successiva, in un certo senso.
Altre obiezioni sono inerenti direttamente alla matematica e precisamente alla concezione degli enti ideali.

" . . . essi dicono, inoltre, che una linea viene prodotta dallo scorrimento di un punto, una superficie dallo scorrimento di una linea, e un corpo solido dallo scorrimento di una superficie . . . "

" . . . il punto che essi definiscono come segno-privo-di-dimensioni, si deve concepire o come corporeo o come incorporeo. Corpo esso non è, secondo le loro stesse affermazioni, giacché le cose che non hanno dimensione, secondo loro, non sono corpi. Resta allora da dire che esso è incorporeo, il che è ancora una vola incredibile. Infatti ciò che è incorporeo non si può concepire come generatore di una linea; quindi il punto non è un segno-privo-di-dimensioni.

In altri termini Sesto si pone il problema di come un ente senza dimensioni, il punto, possa generare (per scorrimento) un ente con una dimensione, la linea. Tale osservazione equivale, in un certo senso, ad osservare che se la lunghezza di un punto è zero allora ogni segmento, in quanto insieme (somma) di punti, deve avere lunghezza zero. La differenza consiste nel riferirsi alla linea prodotta dallo scorrimento di un punto (operazione questa che non sembra coinvolgere l'infinito attuale) e non alla linea intesa come insieme di punti (concezione questa che, coinvolgendo l'infinito attuale, non era presa in considerazione). Tale tipo di argomentazione viene ripetuta anche per confutare il concetto di linea senza larghezza il cui scorrimento genera una superficie e quello di superficie senza spessore il cui scorrimento genera i solidi.

Infine un altro tipo di critica riguarda il procedimento di astrazione mediante il quale l'uomo perverrebbe a concepire gli enti matematici ideali. Infatti per Sesto tutto ciò che viene concepito viene concepito o mediante una diretta esperienza oppure tramite un procedimento di immaginazione-astrazione. Ora è evidente che non possiamo mai avere una esperienza diretta, ad esempio, di una linea senza larghezza e che questa idea di linea non è simile a niente di esistente

. . . giacché non cade sotto i nostri sensi una lunghezza che sia priva di larghezza . . .

D'altra parte un procedimento di immaginazione-astrazione può avvenire

. . . per somiglianza, ad esempio dall'immagine di Socrate lo stesso Socrate, per composizione, ad esempio dal cavallo e dall'uomo un ippocentauro giacché mescolando le membra del cavallo e dell'uomo noi siamo riusciti ad immaginare

> *l'ippocentauro che non è né uomo né cavallo ma è composto da entrambi. Per analogia, infine, si concepisce qualcosa ancora in due guise ossia o per accrescimento o per diminuzione, come quando, ad esempio, tenendo presenti gli uomini normali . . . concepiamo per accrescimento il Ciclope . . . e come quando per diminuzione immaginiamo un pigmeo che non ci è mai caduto sotto i sensi.*

Ora è evidente che il concetto di linea senza larghezza non è simile a niente di esistente per lo stesso motivo per cui non è determinato dall'esperienza. è anche immediato che tale concetto non si ottiene per composizione come nel caso dell' ippocentauro. Non resta altro che il procedimento di diminuzione ma anche questo permette solo di ridurre a piacere (potenzialmente) la larghezza non di considerarla (attualmente) nulla e quindi non permette il tipo di astrazione che si richiederebbe. Anche in questo caso entra in gioco il rifiuto dell'infinito attuale. Ad esempio se noi volessimo definire un punto P immaginando una piccola sfera s_1 di centro P, poi un altra sfera s_2 di centro P e raggio dimezzato e così via, allora il punto P sarebbe il frutto del processo di astrazione definito in tale modo solo se noi potessimo considerare tale processo terminato con un operazione di limite possibile solo se si accetta l'infinito attuale.

Un altro tipo ancora di procedimento possibile di astrazione è quello che fa pervenire ad un concetto mediante una semplice cancellazione di alcune delle proprietà dell'oggetto di partenza. Così il concetto di linea senza larghezza si può ottenere semplicemente "facendo finta" che la larghezza di un oggetto reale non esiste. Ma:

> *. . . se noi, dopo aver concepito una certa lunghezza avente una data quantità di larghezza, abbiamo altresì la possibilità di assumere una lunghezza priva di larghezza sopprimendo quest'ultima, allora allo stesso modo, dopo aver concepito un pezzo di carne che abbia la proprietà di essere vulnerabile, mediante la soppressione di tale proprietà noi potremo anche concepire una carne che non sia soggetta alla vulnerabilità . . . Ma tale cosa è completamente impossibile e contraria alle comuni nozioni umane: infatti ciò che viene concepito come invulnerabile secondo noi non è affatto carne, giacché la carne, in quanto carne, viene concepita con la proprietà di essere vulnerabile . . . Onde anche la lunghezza concepita come priva di larghezza non potrebbe essere una lunghezza, giacché la lunghezza, in quanto lunghezza, viene concepita come avente una certa quantità di larghezza.*

In altre parole se un oggetto ideale $\grave{A}$ si ottiene da un oggetto concreto A facendo astrazione da alcune particolari proprietà allora non è chiaro perché si possa considerare $\grave{A}$ un rappresentante di A (o viceversa), cioè non è chiaro che relazione sussiste tra A ed $\grave{A}$. In particolare, supponiamo di avere dimostrato una proposizione per l'ente ideale $\grave{A}$, allora chi mi autorizza a dire che tale proposizione è valida anche per A ? Ad esempio supponiamo che un astronomo debba studiare l'orbita di un asteroide A in presenza dei pianeti A_1, A_2,..., A_n. Per fare questo supponiamo che decida di rappresentare con il punto $\grave{A}$ l'asteroide e con i punti A_1',..., A_n' i pianeti (su cui si concentra la massa). Supponiamo inoltre che, applicando la geometria euclidea e la meccanica del moto dei punti, giunga ad una conclusione. Chi ci assicura che tale conclusione, valida per $\grave{A}$ sia valida anche per l'asteroide reale A ?

LETTURA

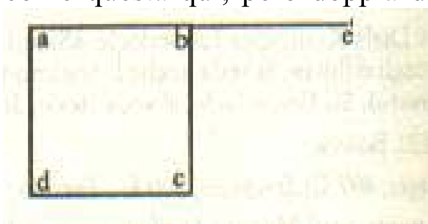
Da *IL MENONE* di Platone

In questo dialogo si dimostra il teorema di Pitagora nel caso in cui i due cateti siano uguali, in altre parole nel caso in cui il triangolo è formato dal lato e dalla diagonale di un quadrato. Tale dialogo costituisce un bellissimo esempio di “didattica della matematica” in quanto lo scopo di Socrate è quello di fare “emergere” la dimostrazione del teorema dalla mente del servo.

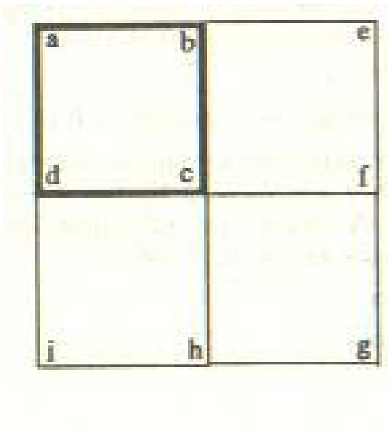
MENONE: Si, o Socrate ma in che senso tu dici che noi non apprendiamo, ma che ciò che noi chiamiamo apprendimento è reminiscenza? Sapresti insegnarmi che è veramente così?
SOCRATE: Già prima dicevo, o Menone, che sei un furbacchione ora mi domandi se so insegnarti proprio mentre sto dicendo che non c'è insegnamento ma reminiscenza evidentemente per farmi subito apparire in contraddizione con me stesso.
MENONE: No, per Zeus, o Socrate, non l'ho detto con questo scopo, ma solo per l'abitudine. Se, però, in qualche modo mi puoi dimostrare che la cosa sta così come dici, dimostramelo.
SOCRATE: Ma non è facile! Tuttavia, per te, sono disposto a farlo. Chiamami un po' uno dei tuoi numerosi servi che sono qui, quello che vuoi tu, affinché tramite lui ti possa dare la dimostrazione.
MENONE: Certo. Vieni qui, ragazzo!
SOCRATE: E' greco e parla greco?
MENONE: Si, perfettamente. E' nato in casa.
SOCRATE: Fa' bene attenzione, se ti sembra che si ricordi o che impari da me.
MENONE: Presterò attenzione.
SOCRATE: Dimmi un po', ragazzo, sai che questa qui è un'area quadrata (abcd)?
RAGAZZO: Si.
SOCRATE: Il quadrato è dunque una superficie che ha uguali tutti questi lati, che sono quattro (ab, bc, cd, da).

RAGAZZO: Certamente.
SOCRATE: E non ha forse uguali anche queste linee qui, che lo attraversano nel mezzo (ac, bd)?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: E non potrebbe esserci forse una superficie come questa e più grande e più piccola?
RAGAZZO: Certamente.
SOCRATE: Se dunque questo lato (bc) fosse di due piedi, e anche questo (ab) di due, di quanti piedi sarebbe l'intero? Fa questa considerazione: se da questa parte (ab) fosse di due piedi e da quest'altra (bc) di uno solo, la superficie non sarebbe forse di una volta due piedi?
RAGAZZO: Sì .
SOCRATE: Ma, poiché anche da questa parte (bc) è di due piedi, non diventa di due volte due piedi?
RAGAZZO: Sì, diventa.
SOCRATE: Diventa, perciò, di due volte due piedi?
RAGAZZO: Esatto .
SOCRATE: E quanti sono, allora, due volte due piedi? Fa' il conto e dillo.
RAGAZZO: Quattro, o Socrate.
SOCRATE: E non potrebbe darsi un'altra superficie doppia di questa, ma tale da avere tutti i lati eguali come questa?
RAGAZZO: Sì.

SOCRATE: Di quanti piedi sarà dunque?
RAGAZZO: Di otto.
SOCRATE: E ora cerca di dirmi di quanto sarà ciascun lato di essa. Il lato di questa è di due piedi; e, allora, di quanto sarà quello di quella doppia?
RAGAZZO: E' chiaro, o Socrate, che sarà doppio.
SOCRATE: Vedi, o Menone, che io non gli insegno, ma che lo interrogo su ogni cosa? Ed ora, costui ritiene di sapere quale sia il lato dal quale deriverà l'area di otto piedi: o non ti sembra?
MENONE: A me sì.
SOCRATE: E lo sa, dunque?
MENONE: Per nulla.
SOCRATE: Però ritiene che derivi dal lato doppio.
MENONE: Sì.
SOCRATE: Osserva come verrà via via ricordandosi, come appunto deve ricordarsi. E tu dimmi: dal lato doppio, dici che ha origine la superficie doppia? E tale, dico, che non sia di qui lunga e di qui corta, ma che sia eguale da ogni parte come questa qui, però doppia di questa, ossia di otto piedi. Ma sta' attento, se ti sembra ancora che possa derivare dal lato doppio.

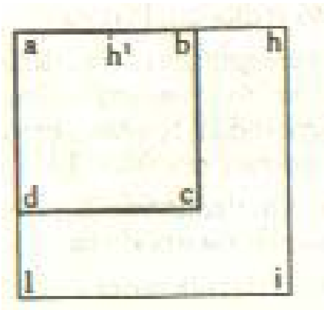


RAGAZZO: A me sì.
SOCRATE: E non diventa forse questo lato (ae) doppio di questo (ab), se ne aggiungiamo un altro come questo, da questa parte (be)?
RAGAZZO: Certamente.
SOCRATE: Da questo (ae), dici tu, deriverà la superficie di otto piedi, quando si tracceranno quattro lati come questi .



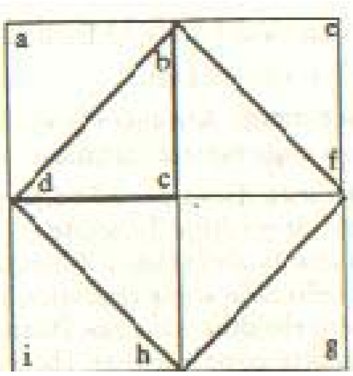
RAGAZZO: Esattamente.
SOCRATE: Ma in questa superficie non ci sono forse queste quattro qui (abcd, befc, cfgh, dchi), delle quali ognuna è uguale a questa di quattro piedi (abcd)?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: Disegnamo, allora, a partire da questo 4 lati uguali . E' oppure no questa la superficie (aegi) che tu affermi essere di 8 piedi ?
RAGAZZO : Esattamente .
SOCRATE : Ma in questa superficie non vi sono forse queste 4 qui (abcd , befc , cfgh , dchi), delle quali ognuna é uguale a questa di 4 piedi?
RAGAZZO : Sì
SOCRATE: E quanto diventa allora? Non diventa quattro volte questa?
RAGAZZO: E come no?
SOCRATE: E allora, è il doppio quattro volte tanto?
RAGAZZO: No, per Zeus.
SOCRATE: Ma quante volte?
RAGAZZO: Quadruplo.
SOCRATE: Dunque, dal lato doppio, o ragazzo, non deriva una superficie doppia ma quadrupla.
RAGAZZO: Dici il vero.
SOCRATE: E quattro volte quattro, fanno sedici, no?
RAGAZZO: Sì.

SOCRATE: E allora, quella di otto piedi da quale lato? Non se ne ottiene da questo (ae) una quadrupla?
RAGAZZO: Sì, lo dico.
SOCRATE: E quella di quattro, dalla metà di questo qui (ae)?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: Ebbene, l'area di otto piedi non è forse doppia di questa qui (abcd), e metà di quest'altra (aegi)?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: E allora, non deriverà da un lato maggiore rispetto a questo (ab), ma minore rispetto a quest'altro (ae); o no?
RAGAZZO: Così mi pare.
SOCRATE: Bene; quello che a te sembra devi rispondere. E dimmi: questo lato (ab) non era di due piedi e quest'altro (ae) di quattro?
RAGAZZO: Si.
SOCRATE: Bisogna allora che il lato della superficie di otto piedi sia maggiore di questo di due, ma minore di quello di quattro.
RAGAZZO: Bisogna .
SOCRATE: Cerca allora di dire di che lunghezza tu affermi che esso debba essere.
RAGAZZO: Di tre piedi.
SOCRATE: Se dev'essere di tre piedi, aggiungiamo dunque a questo lato (ab) la metà di questo (ah), e avremo i tre piedi (ah). Questi sono due piedi (ah) e questo uno (hh). Alla stessa maniera, a partire di qua si ottengono due piedi (ab) più un piede (dc). Ne deriva, così, l'area che tu dici (abil).
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: Ma se da questa parte (ab) è di tre, e da quest'altra (hi) di tre, l'intera superficie non diventa di tre volte tre piedi?

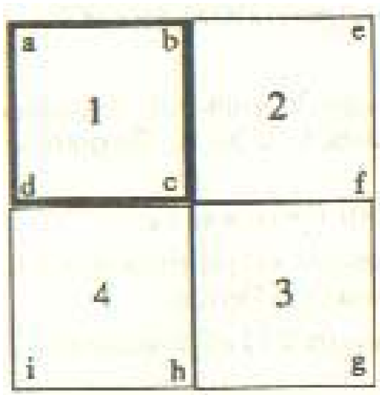


RAGAZZO: Sembra.
SOCRATE: E tre volte tre, quante volte sono?
RAGAZZO: Nove.
SOCRATE: E il doppio, di quanti piedi doveva essere?
RAGAZZO: Otto.
SOCRATE: Dal lato di tre piedi non deriva per nulla la superficie di otto.
RAGAZZO: No, certo.
SOCRATE: Ma allora da quale lato? Cerca di dircelo con esattezza; e se non vuoi fare calcoli, indicaci almeno da quale.
RAGAZZO: Ma per Zeus, o Socrate, io non lo so.
SOCRATE: Comprendi ora, o Menone, a che punto si trova attualmente nel processo del ricordare? Prima, cioè, non sapeva quale fosse il lato del quadrato di otto piedi, come del resto neppure ora lo sa; tuttavia, allora credeva di saperlo, e rispondeva con sicurezza come se sapesse e non riteneva di aver dubbi; ora è convinto di aver dubbi e come non sa, così neppure crede di sapere.
MENONE: Dici il vero.
SOCRATE: Non si trova dunque, ora, in una situazione migliore, relativamente alla cosa che non sapeva?
MENONE: Anche questo mi pare:
SOCRATE: Avendolo fatto dubitare, pertanto, e avendolo fatto intorpidire come fa la torpedine, gli abbiamo forse nuociuto?
MENONE: Non mi pare.

SOCRATE: Dunque, come sembra, gli abbiamo recato giovamento, al fine della ricerca di come stia effettivamente la cosa. Ora, infatti, ricercherebbe anche di buon grado, dal momento che non sa; mentre allora, facilmente, di fronte a molti e spesso avrebbe creduto di dire bene, affermando che per ottenere una superficie doppia, bisogna prendere il lato doppio in lunghezza.
MENONE: Sembra.
SOCRATE: Credi, dunque, che egli si sarebbe messo a cercare o ad imparare ciò che egli riteneva di sapere non sapendolo, prima che fosse caduto nel dubbio ritenendo di non sapere, e che avesse desiderato di conoscere?
MENONE: Non mi pare, o Socrate.
SOCRATE: Dunque, l'intorpidimento gli ha giovato?
MENONE: Mi sembra.
SOCRATE: Osserva, ora, da questo dubbio come scoprirà la verità, ricercando insieme a me, mentre io non farò altro che interrogarlo, senza insegnargli. . E fa bene attenzione che tu non mi colga ad insegnargli o a spiegargli, e non solo ad interrogarlo intorno alle sue convinzioni. Dimmi, dunque: non è di quattro piedi questa superficie (abcd)? Comprendi?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: Potremmo aggiungere ad essa quest'altra eguale (befc)?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: E quest'altra terza, uguale a ciascuna di queste (cfgh)?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: E non potremmo anche completare la figura in questo angolo (dchi)?
RAGAZZO: Certamente.



SOCRATE: E non risulteranno queste quattro superfici eguali ?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: E, allora, tutto questo intero (aegi), quante volte diventa più grande di questo (abcd)
RAGAZZO: Quattro volte.
SOCRATE: Per noi, invece, doveva essere il doppio; o non ricordi?
RAGAZZO: Certamente.
SOCRATE: E questa linea tracciata da un angolo all'altro (bd, bf, fh, hd), non viene forse a dividere a metà ciascuna di queste superfici?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: Non si ottengono, dunque, queste quattro linee uguali racchiudenti quest'area qui (bfhd)?
RAGAZZO: Sì, si ottengono.
SOCRATE: Considera allora: quanto grande è questa superficie (bfhd)?
RAGAZZO: Non lo so.
SOCRATE: Di questi quadrati, che sono quattro, ciascuna linea non ha tagliato internamente la metà di ciascuno? O no?
RAGAZZO: Sì.



SOCRATE: E quante ve ne sono di queste metà in questa figura (bfhd)?
RAGAZZO: Quattro.
SOCRATE: E quante in quest'altra (abcd)?
RAGAZZO: Due.
SOCRATE: E il quattro che cos'è rispetto al due?

RAGAZZO: Il doppio.
SOCRATE: Questa superficie, dunque, di quanti piedi diventa?
RAGAZZO: Di otto piedi.
SOCRATE: Da quale linea?
RAGAZZO: Da questa (a'b).
SOCRATE: Da quella che abbiamo tracciata da un angolo all'altro del quadrato di otto piedi?
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: Coloro che se ne intendono chiamano questa linea diagonale; sicché, se essa ha nome diagonale, allora dalla diagonale, come tu dici, o ragazzo di Menone, si può ottenere l'area doppia.
RAGAZZO: Certamente, o Socrate.
SOCRATE: Che cosa ti sembra, o Menone? C'è qualche pensiero da lui espresso che non sia suo ?
MENONE: No, tutti suoi.
SOCRATE: Eppure, non sapeva, come dicevamo poco fa.
MENONE: Dici il vero.
SOCRATE: E c'erano in lui questi pensieri o no?
MENONE: Sì.
SOCRATE: Dunque, in chi non sa intorno alle cose che non sa, vi sono opinioni vere che ad esse si riferiscono?
MENONE: Sembra.
SOCRATE: Ora in lui, come un sogno, sono state suscitate queste opinioni; e, interrogandolo di nuovo più volte e in molti modi su queste stesse cose, sta certo che finirà per sapere con precisione, sulle medesime, non meno esattamente di ogni altro .
MENONE: Pare proprio di sì.
SOCRATE: Dunque, egli saprà senza che nessuno gli insegni, ma solo che lo interroghi, traendo egli stesso la scienza da se medesimo.
RAGAZZO: Sì.
SOCRATE: E questo trarre la scienza di dentro a sé, non è ricordare?
MENONE: Certamente.
SOCRATE: E la scienza che ora egli possiede, o la imparò un tempo o la possedette sempre.
MENONE: Sì.
SOCRATE: Dunque, se la possedette sempre, fu anche sempre conoscente; e se, invece, l'ha appresa in un tempo, non poté certo averla appresa nella presente vita. Oppure gli insegnò qualcuno geometria? Costui, infatti, farà lo stesso per tutta la geometria, e per tutte quante le altre scienze. C'è, forse, uno che gli abbia insegnato tutto? A buon diritto tu devi saperlo: non per altro, perché è nato ed è stato allevato in casa tua.
MENONE: Ma lo so che nessuno gli ha mai fornito insegnamenti.
SOCRATE: Ed ha o non ha queste conoscenze?
MENONE: Necessariamente, o Socrate, sembra.
SOCRATE: Allora, se non le ha acquisite nella presente vita, questo non è ormai evidente, ossia che le ebbe e le apprese in un altro tempo?
MENONE: E' chiaro.
SOCRATE: E non è forse questo il tempo in cui egli non era uomo?
MENONE: Sì .
SOCRATE: Se, allora, e nel tempo in cui è uomo e nel tempo in cui non lo è, vi sono in lui opinioni vere, le quali, risvegliate mediante l'interrogazione, diventano conoscenze, l'anima di lui non sarà stata in possesso del sapere sempre in ogni tempo? E' evidente, infatti , che, nel corso di tutto quanto il tempo, talora è e talora non è uomo.
MENONE: E' chiaro.

SOCRATE: Se, dunque, sempre la verità degli esseri è nella nostra anima, l'anima dovrà essere immortale. Sicché bisogna mettersi con fiducia a ricercare ed a ricordare ciò che attualmente non si sa: questo è infatti ciò che non si ricorda.
MENONE: Mi sembra che tu dica bene, o Socrate, ma non so come.

APPENDICE

Il metodo dimostrativo di Euclide non è poi tanto affidabile.

Le dimostrazioni presenti nei libri di Euclide sono sempre molto belle ed intuitive. Nel metodo dimostrativo di Euclide sono sempre presenti sia il rigore logico della deduzione sia l'interpretazione intuitiva dei singoli passi inferenziali. Tuttavia a volte l'intuizione geometrica trae in inganno. Nel seguito riporto la dimostrazione, di tipo euclideo, del fatto che 5 =0. Questa dimostrazione mi è stata raccontata da un collega a cui è stata raccontata da un altro collega. Lascio a chi legge il compito di trovare dove è l'errore nella dimostrazione.

Teorema: Il numero 5 è uguale al numero 0.

Dim. Costruiamo il quadrilatero di vertici A, B, C, D in modo che l'angolo in D sia retto, l'angolo in C sia di 95 gradi e $DA = CB$. Si tracci l'asse di DC e l'asse di AB. Poiché DC non è parallelo ad AB i due assi non sono paralleli tra di loro e pertanto si incontrano in un punto H. Si vengono pertanto a formare due triangoli AHD e BHC che risultano uguali. Infatti AD è uguale a BC per costruzione, $AH = HB$ perché il triangolo AHB è isoscele, $DH = CH$ perché il triangolo DHC è isoscele. Dal fatto che i triangoli AHD e BHC sono uguali segue che l'angolo $A\hat{D}H$ è uguale all'angolo $H\hat{C}B$. Essendo il triangolo DHC isoscele risulta anche che $H\hat{D}C = D\hat{C}H$. In definitiva possiamo concludere che

$$A\hat{D}C = A\hat{D}H + H\hat{D}C = H\hat{C}B + H\hat{D}C = D\hat{C}B$$

e quindi che 90 = 95. Sottraendo 90 da entrambi i membri si ottiene che 0 = 5.