

Corso di Logica Matematica, a.a. 2002/03, canale A-D

Docente: Prof.ssa Anna Labella

Esercizi sulla logica dei predicati: tableaux e Gentzen

Paola Rizzo

1. Usando il metodo dei tableaux, si dimostri la validità della formula:
 $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall xp(x) \rightarrow \forall xq(x))$
2. Sia data la formula: $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall xp(x) \vee \forall xq(x))$

(a) La seguente dimostrazione di validità è corretta?

$$\begin{array}{c}
 \neg(\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall xp(x) \vee \forall xq(x))) \\
 \downarrow \\
 \forall x(p(x) \vee q(x)), \neg(\forall xp(x) \vee \forall xq(x)) \\
 \downarrow \\
 \forall x(p(x) \vee q(x)), \neg\forall xp(x), \neg\forall xq(x) \\
 \downarrow \\
 \forall x(p(x) \vee q(x)), \neg\forall xp(x), \neg q(a) \\
 \downarrow \\
 \forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(a), \neg q(a) \\
 \downarrow \\
 p(a) \vee q(a), \neg p(a), \neg q(a) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 p(a), \neg p(a), \neg q(a) \quad q(a), \neg p(a), \neg q(a) \\
 \times \qquad \qquad \qquad \times
 \end{array}$$

(b) Trovare almeno un modello per la formula.

3. Sia data la formula: $\forall x\forall yp(x, y) \rightarrow \exists x\exists yp(x, y)$

- (a) usando il metodo dei tableaux e di Gentzen, dimostrare che la formula è valida;
 - (b) cosa si può dire dell'implicazione inversa? Trovare almeno un modello per essa.
4. Sia data la formula aperta: $A(x, y)$, e l'interpretazione $I = \{P, \text{"Ama"}\}$, dove P è un insieme non vuoto di persone.
- (a) che differenze ci sono fra le seguenti formule? (1) $\forall x \exists y A(x, y)$, (2) $\exists y \forall x A(x, y)$, (3) $\exists x \forall y A(x, y)$, (4) $\forall y \exists x A(x, y)$. Esprimere le formule in linguaggio comune;
 - (b) quali fra le seguenti formule sono valide?
 - i. $\exists y \forall x A(x, y) \rightarrow \forall x \exists y A(x, y)$
 - ii. $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y A(x, y)$
 - iii. $\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$
 - iv. $\forall y \exists x A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y A(x, y)$
5. Dimostrare mediante tableaux e Gentzen la validità delle formule del tipo seguente: $\exists x \forall y_1 \dots \forall y_n p(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \forall y_1 \dots \forall y_n \exists x p(x, y_1, \dots, y_n)$
6. Usando i tableaux e Gentzen, dimostrare la validità della formula:
 $\exists x \forall y \exists z p(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y \exists z p(y, x, z)$
7. La seguente formula è valida?
 $\forall x \exists y p(x, y) \wedge \forall x \neg p(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z))$
 Esiste un modello per essa?
8. La seguente formula è valida?
 $\forall x \exists y p(x, y) \wedge \forall x \neg p(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x, z)) \wedge \forall x (q(x) \wedge \neg q(x))$
 Esiste un modello per essa?