

# Appunti Senza Pretese di Programmazione II:

## Alberi di Ricerca

Alessandro Panconesi  
DSI, *La Sapienza*, Roma

Vediamo adesso un altro modo di risolvere *Il Problema del Dizionario*, cioè quello di realizzare una struttura dati che consenta di inserire, cancellare e cercare delle **voci** tramite una chiave di ricerca in modo semplice e rapido. La struttura dati in questione è detta **albero di ricerca**. Essa consiste di un albero binario in cui ogni nodo contiene un valore detto **chiave** che per semplicità assumeremo essere un intero positivo. L'albero soddisfa la seguente proprietà:

*Dato un qualsiasi nodo  $x$  dell'albero, il sottoalbero di sinistra contiene valori minori del valore di  $x$ , mentre il sottoalbero di destra contiene valori maggiori di quello di  $x$ .*

Nel proseguo denoteremo con  $x$  sia il nodo che il suo valore. A rigore dovremmo distinguere tra i due usando, ad esempio,  $x$  per il nodo e  $v_x$  o qualcosa di simile per il valore ivi contenuto. Ma dato che la cosa non dovrebbe creare ambiguità di sorta, per semplicità tipografica adotteremo la suddetta convenzione. Dato  $x$ , denoteremo con  $L_x$  il suo sottoalbero di sinistra (L=left) e con  $R_x$  quello di destra (R=right). Dato un albero  $T$ , la proprietà che  $T$  è un albero di ricerca può quindi esprimersi come segue (“ $\wedge$ ” è un simbolo della logica proposizionale che denota la congiunzione “e”):

$$\forall x \in T, (\forall y \in L_x y < x) \wedge (\forall z \in R_x x > z).$$

Diremo inoltre per semplicità che “ $y$  è minore (maggiore) di  $x$ ” come abbreviazione della frase “il valore contenuto nel nodo  $y$  è minore (maggiore) del valore contenuto nel nodo  $x$ .”

**Esercizio 1** *Sia dato un albero binario  $T$  con la seguente proprietà ricorsiva: per ogni nodo  $x$ , il figlio sinistro è minore o uguale di  $x$ , mentre quello destro è maggiore o uguale ad  $x$ .  $T$  è un albero di ricerca?*

## 1 Operazioni sugli alberi di ricerca

Per fissare le idee nella discussione che segue definiamo le strutture dati PASCAL per implementare un albero di ricerca. Ciò è fatto in Figura 1. Sebbene `Tree` e `↑Node` siano la stessa cosa è opportuno distinguerli perché ciò rende i programmi più leggibili. La struttura degli alberi di ricerca consente di ricercare ed inserire elementi con grande facilità. La ricerca avviene tramite il seguente algoritmo ricorsivo, che ricorda la ricerca binaria (o dicotomica) vista in precedenza.

PROCEDURA FIND: dati due parametri, un albero `t` ed una chiave  $x$ , la procedura restituisce un puntatore ad un nodo se l'elemento esiste e `nil` altrimenti.

- Se l'albero `t` è vuoto (`nil`) restituisci `nil`;
- se la radice di `t` contiene  $x$  restituisci `t`;
- se la chiave della radice di `t` è maggiore di  $x$ , invoca ricorsivamente `find` con  $x$  ed il sottoalbero sinistro;
- altrimenti, invoca ricorsivamente `find` con  $x$  ed il sottoalbero destro.

---

```
type
  keyType: integer;
  Tree: ↑Node;
  record Node =
    key: keyType;
    parent: ↑Node ;
    left: Tree;
    right: Tree;
  end;
```

---

Figure 1: Tipi di dato per rappresentare alberi di ricerca.

---

```
function find(x: keyType; t: Tree): ↑Node;
begin
  if (t=nil) then find := nil
  else if (t↑.key=x) then find:= t;
  else if (t↑.key > x) then find:= find(x, t↑.left);
  else { t↑.key < x } find:= find(x, t↑.right);
end;
```

---

Figure 2: Implementazione di `find`

L'algoritmo si traduce immediatamente nel codice di Figura 2.

L'inserimento si ottiene tramite un algoritmo molto simile. La procedura assume che l'elemento da inserire non sia presente nell'albero. È possibile controllare questa condizione ad esempio tramite la procedura `find` vista in precedenza. La ricerca attraversa l'albero alla maniera della ricerca binaria sino a quando non viene individuato il "posto giusto" per l'inserimento: se l'albero è vuoto l'elemento da inserire diventa la nuova radice, altrimenti la ricerca procede nel sottoalbero sinistro, se la chiave da inserire è più piccola di quella del nodo corrente, oppure nel sottoalbero destro, se la chiave da inserire è più grande del nodo corrente.

**Esercizio 2** *In quanti posti diversi può essere inserito un nuovo elemento?*

PROCEDURA INSERT: dati due parametri, un albero `t` ed un nodo esterno puntato da `p`, la cui chiave non è presente in `t`, la procedura inserisce il nuovo elemento al posto giusto.

- Se l'albero `t` è vuoto (il nodo puntato da) `p` ne diventa la nuova radice;
- se la chiave della radice di `t` è maggiore di quella di `p`, invoca ricorsivamente `insert` con `p` ed il sottoalbero sinistro;
- altrimenti, invoca ricorsivamente `insert` con `p` ed il sottoalbero destro.

---

```
procedure insert(p: ↑Node, var t: Tree);
begin
  if (t=nil) then t := p
  else if (t↑.key>x) then insert(p, t↑.left);
  else if (t↑.key<x) then insert(p, t↑.right);
end;
```

---

Figure 3: Implementazione di `insert`

L'implementazione di questo algoritmo presenta una sottigliezza. La ricerca ricorsiva del “posto giusto” inizia col parametro `t` che punta alla radice dell'albero il quale poi via via assume i valori dei campi `t↑.left` e `t↑.right` fino a quando non assume il valore `nil`. Tipicamente a quel punto `t` è il campo puntatore `left` o `right` di una foglia dell'albero. Per poterne modificare il contenuto bisognerebbe avere un puntatore alla foglia. Per far ciò è possibile trascinarsi dietro un puntatore che punti “un passo indietro” oppure, più elegantemente, passare `t` come `var`. Questa è la soluzione adottata in Figura 3.

**Esercizio 3** *Scrivere una versione iterativa della procedura `find`. (Suggerimento: **non** utilizzare `pile`).*

**Esercizio 4** *Scrivere la `insert` come **funzione**. Come prima versione fatelo senza aggiornare il campo `parent`.*

**Esercizio 5** *La procedura `insert` di Figura 3 non aggiorna il campo `parent`. Riscrivetela in modo che esso venga aggiornato. Per la radice dell'albero il campo deve essere posto a `nil`.*

**Esercizio 6** *Scrivere una versione iterativa delle procedure `find` e `insert`.*

**Esercizio 7** *Quale parametro di un albero di ricerca dá il costo delle operazioni `find` e `insert`?*

L'implementazione di `delete` è invece più complessa. Prima di vedere come fare esploriamo altre proprietà degli alberi di ricerca.

## 2 Proprietá degli Alberi di Ricerca

La struttura di un albero di ricerca consente di estrarre notevoli informazioni senza neanche analizzare le chiavi degli elementi. Come al solito il miglior modo per rendersene conto è di risolvere degli esercizi.

**Esercizio 8** *Scrivere una procedura (ricorsiva!) che, dato un albero di ricerca, ne stampi i valori in ordine crescente.*

**Esercizio 9** *Scrivere una procedura che, dato un albero di ricerca, ne stampi il valore minimo.*

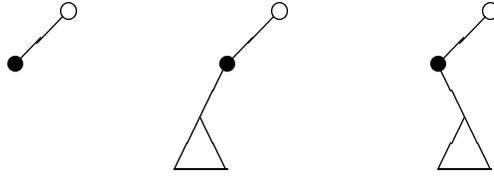


Figure 4: I tre casi per `spliceLeft`. Il nodo da cancellare é in neretto.

### 3 Cancellazione

Veniamo ora al problema della cancellazione. Costruiremo la soluzione analizzando i vari casi che possono presentarsi. Il problema con la cancellazione é che, contrariamente all’inserimento, la eliminazione di un nodo puó distruggere la struttura dell’albero. Il nodo da cancellare puó presentare un numero abbastanza alto di tipologie, ma come vedremo ad una analisi piú attenta, i casi veramente diversi, quelli che necessitano trattamenti diversi tra loro, sono pochi. Di primo acchitto sembrerebbe che le variabili in gioco siano tre. La prima é il “ruolo” del nodo, che puó essere quello di foglia, nodo interno o radice. Il secondo é il numero di figli, che possono essere 0, 1 oppure 2. Infine, potrebbe essere rilevante se il nodo da eliminare fosse il figlio sinistro o destro di suo padre (la radice é esclusa da questa tipologia). Andando per gradi riusciremo a condensare tutti questi casi in un numero minore di casi diversi.

Denotiamo d’ora in poi con  $p$  il nodo da cancellare e con  $f_p$  suo padre. Siano inoltre  $L_p$  ed  $R_p$ , rispettivamente, i sottoalberi sinistro e destro. Iniziamo con il considerare la seguente situazione: almeno uno dei due sottoalberi di  $p$  é vuoto. Possono quindi darsi tre casi, illustrati in Figura 4, vale a dire:

1.  $p$  é il figlio sinistro di  $f_p$  e non ha figli;
2.  $p$  é il figlio sinistro di  $f_p$  ed ha  $L_p$  ma  $R_p$  é vuoto;
3.  $p$  é il figlio sinistro di  $f_p$  ed ha  $R_p$  ma  $L_p$  é vuoto.

Questi tre casi possono essere gestiti molto semplicemente in questo modo: *Se  $L_p$  é vuoto allora  $R_p$  diventa il sottoalbero sinistro di  $f_p$ , altrimenti lo diventerá  $L_p$ .* Chiameremo questa procedura `spliceLeft`.

**Esercizio 10** Implementare `spliceLeft` la quale, dato in ingresso un puntatore  $p$  ad un nodo che soddisfa alle tre condizioni di cui sopra, lo cancelli.

La situazione simmetrica é la seguente:

1.  $p$  é il figlio destro di  $f_p$  e non ha figli;
2.  $p$  é il figlio destro di  $f_p$  ed ha  $L_p$  ma  $R_p$  é vuoto;
3.  $p$  é il figlio destro di  $f_p$  ed ha  $R_p$  ma  $L_p$  é vuoto.

... ed ovviamente puó essere trattata in modo identico.

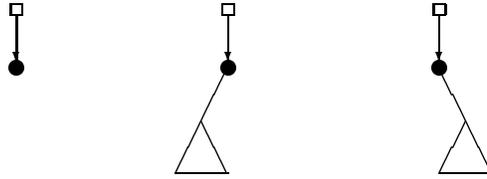


Figure 5:  $p$ , in nero, è radice dell'albero. Il puntatore `root` è raffigurato con un quadrato.

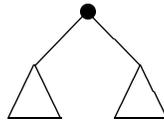


Figure 6:  $p$  è un nodo interno con entrambi i sottoalberi non vuoti

**Esercizio 11** Implementare `spliceRight` la quale, dato in ingresso un puntatore `p` ad un nodo che soddisfa alle tre condizioni di cui sopra, lo cancella.

Il prossimo caso che consideriamo è quello in cui  $p$  è la radice dell'albero ed ha almeno uno dei suoi due sottoalberi vuoti. I tre casi relativi sono illustrati in Figura 5. D'ora in poi assumeremo l'esistenza di una variabile globale `root` di tipo `Tree` che punta alla radice.

**Esercizio 12** Scrivere una procedura `spliceRoot` che cancelli il nodo radice nei tre casi illustrati in Figura 5.

D'ora in poi assumeremo di poter disporre delle tre procedure `spliceLeft`, `spliceRight` e `spliceRoot`.

Veniamo quindi all'ultimo caso da considerare, illustrato in Figura 6: il nodo  $p$  ha entrambi i sottoalberi pieni (non vuoti) che è il caso più interessante. Definiamo innanzitutto il *successore* di un nodo  $p$ . Questo altro non è che, tra tutti gli elementi dell'albero  $T$ , il più piccolo dei maggiori di  $p$  (ricordate che stiamo assumendo che nessuna chiave sia ripetuta):

$$s := \min\{x : x \in T, x > p\}.$$

Trovare il successore di un nodo qualsiasi  $p$  non è del tutto immediato e pertanto viene lasciato come utile esercizio al lettore!

**Esercizio 13** Scrivere una funzione `successor` la quale, dato in ingresso un puntatore `p` ad un nodo dell'albero, restituisca un puntatore al successore, se esiste, oppure `nil`, se non esiste.

Ma nel caso che ci interessa il compito è abbastanza semplice: il successore di  $p$  è l'elemento più piccolo di  $R_p$ , il sottoalbero destro di  $p$ .

---

```

procedure delete(p: ↑Node);
var
  isRoot, hasBothChildren: boolean;
  s, f: ↑Node;
begin
  f := p↑.parent;
  isRoot := (f = nil);
  hasBothChildren := ((p↑.left <> nil) and (p↑.right <> nil));
  if (hasBothChildren) then
  begin
    s := successor(p);
    copy(s,p);
    spliceLeft(s);
  end
  else if (isRoot) then spliceRoot(p)
  else if (f↑.left = p) then spliceLeft(p)
  else { f↑.right = p } spliceRight(p)
end;

```

---

Figure 7: Implementazione di `delete`

**Esercizio 14** *Scrivere una funzione `easySuccessor` la quale, dato in ingresso un puntatore  $p$  ad un nodo dell'albero, restituisca un puntatore al successore nel caso in cui il sottoalbero destro sia non vuoto.*

Ora, l'idea per cancellare  $p$  è la seguente. Il successore di  $p$ , chiamiamolo  $s$ , non ha sottoalbero sinistro (dimostratelo!), per cui cancellare  $s$  può essere fatto agevolmente tramite la procedura `spliceLeft` vista in precedenza. A questo punto, basta rimpiazzare  $p$  con  $s$  ed il gioco è fatto. Ricapitolando:

- sia  $s$  il successore di  $p$  e sia  $f_s$  il padre di  $s$ ;
- si rimpiazza  $p$  con  $s$ ; all'atto pratico si copierà il contenuto di  $s$  in  $p$ ;
- si esegue `spliceLeft(s)` il cui effetto è di far diventare  $R_s$ , il sottoalbero destro di  $s$ , il nuovo sottoalbero sinistro di  $f_s$ .

Sostituire  $p$  con  $s$  è corretto in quanto (a)  $s > p$  implica  $s > x$ , per ogni  $x \in L_p$ , e (b) essendo  $s$  l'elemento più piccolo di  $R_p$ ,  $s < y$  per ogni  $y \in R_p - \{s\}$ . L'ultimo passo anche è corretto, a patto naturalmente che voi abbiate programmato correttamente `spliceLeft`.

Per cui il codice PASCAL per la procedura `delete` è dato in Figura 7. Si ricordi che assumiamo l'esistenza di una variabile globale `root` utilizzata in `isRoot` che punta al nodo radice, se esiste, ed è `nil` altrimenti. Si assume anche di disporre di due procedure `copy` e `successor` anche se la procedura `easySuccessor` dell'Esercizio 14 può essere utilizzata al posto di quest'ultima.