

**NOTE DEL CORSO DI FISICA PER STUDENTI
DI SCIENZE BIOLOGICHE. AA 2000-2001**

ELETTROMAGNETISMO

Prof. Valeria Ferrari

Immaginiamo di fare questo esperimento. Strofiniamo una bacchetta di vetro con una pezza di seta, e una di plastica con della pelle; poi sospendiamo le due bacchette a due fili e disponiamole vicine: vedremo che si attraggono. Se invece sospendiamo due bacchette dello stesso materiale “caricate” allo stesso modo vedremo che si respingono.

perche'?

Strofinando la bacchetta somministriamo energia e consentiamo a una piccola quantita' di carica di migrare da un corpo sull'altro. Scopriamo dunque che la carica elettrica esiste in due stati, che indichiamo con + e -. (Fu Benjamin Franklin a introdurre questa convenzione): cariche dello stesso segno si respingono, di segno opposto si attraggono.

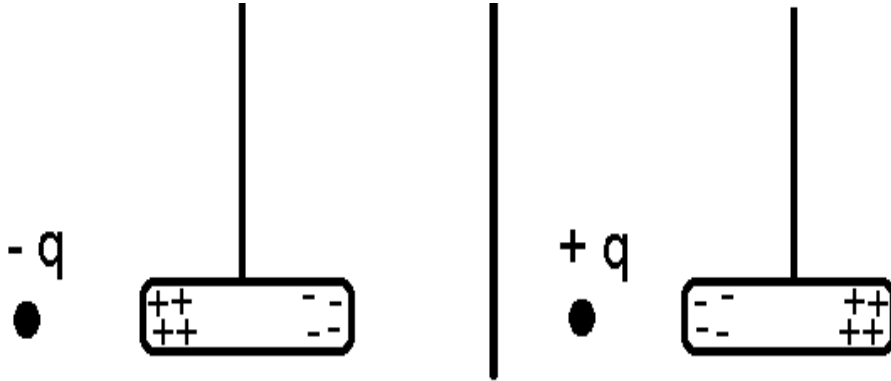
Per esempio quando strofiniamo il vetro con la seta, delle cariche negative si trasferiscono sulla seta e la bacchetta rimane carica positivamente. Se invece strofiniamo una bacchetta di plastica con della pelle, essa si caricherà negativamente. Questo fenomeno è noto fin dai tempi antichi; si sapeva per esempio che strofinando un pezzo di ambra questo attraeva dei pezzetti di paglia.

Conduttori e isolanti

In alcuni materiali, per esempio i metalli, l'acqua, il corpo umano, gli elettroni più esterni degli atomi non rimangono legati ai singoli atomi, ma sono liberi di muoversi all'interno del materiale. Questi materiali si dicono **conduttori**. In altri, quali ad esempio la plastica, il vetro, le cariche non sono libere di muoversi ed essi sono detti **isolanti**. Se per es. tentiamo di caricare una bacchetta di rame strofinandola con un panno di lana e tenendola in mano, essa non si caricherà; infatti il corpo umano è conduttore, ed essendo collegato alla terra si genererà un movimento di cariche che tenderà a neutralizzare immediatamente la carica in eccesso prodotta per strofinio. Per caricare la bacchetta dovremo reggerla con un materiale isolante.

INDUZIONE ELETTROSTATICA

Se si avvicina una carica $-q$ a un conduttore, le cariche negative verranno respinte e migreranno nella parte più lontana rispetto alla carica inducente. Se invece avviciniamo $+q$ le cariche negative si avvicineranno



Questo è il fenomeno dell'**induzione elettrostatica**.

Come vedremo in seguito, le cariche indotte si dispongono in modo tale che la somma dei campi elettrici prodotti da cariche indotte e inducenti sia zero.

LEGGE DI COULOMB

La forza con cui si attraggono o si respingono due cariche elettriche **puntiformi** e'

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

- La legge di Coulomb e' simile alla legge della gravitazione universale di Newton con cui si attraggono le masse puntiformi
- L'unita' di misura della carica e' il **Coulomb**, cioe' il valore della carica che passa in un secondo attraverso la sezione di un filo conduttore percorso dalla corrente di un Ampere. Viene indicata con il simbolo C
- La carica elettrica e' quantizzata, cioe' si presenta in multipli interi della carica dell'elettrone (il nome *elettrone* deriva dal nome greco dell'ambra), dove

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

In realta' le particelle elementari dette *quarks* hanno cariche pari a frazioni di e , pero' non possono esistere individualmente come l'elettrone o il protone.

- Il valore di k dipende dalle unita' di misura che si usano. Nel vuoto la costante k puo' essere scritta come

$$k = k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove ϵ_0 e' detta costante dielettrica del vuoto. In MKS

$$k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

In presenza di materia la forza elettrica diminuisce

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

e per es.

$$\epsilon_r \sim 1 \quad \text{in aria}$$

$$\epsilon_r \sim 81 \quad \text{in acqua}$$

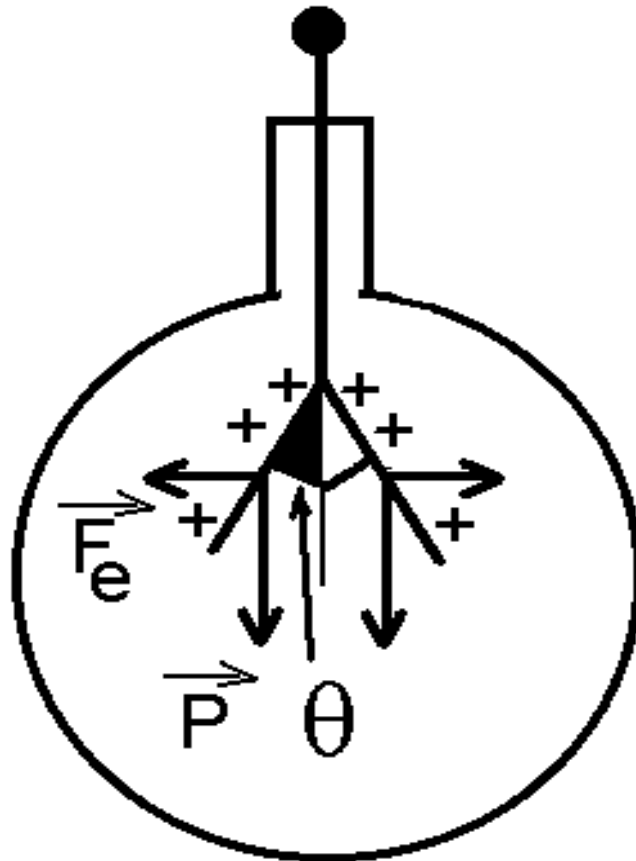
Vedremo in seguito perche'

- **LA CARICA SI CONSERVA**

In qualsiasi interazione tra corpi carichi, la somma algebrica di tutte le cariche presenti rimane costante. Per esempio, nei processi di decadimento radioattivi la quantità di carica presente nel nucleo che si disintegra è sempre pari alla somma delle cariche dei prodotti della disintegrazione.

COME SI MISURA LA CARICA ELETTRICA

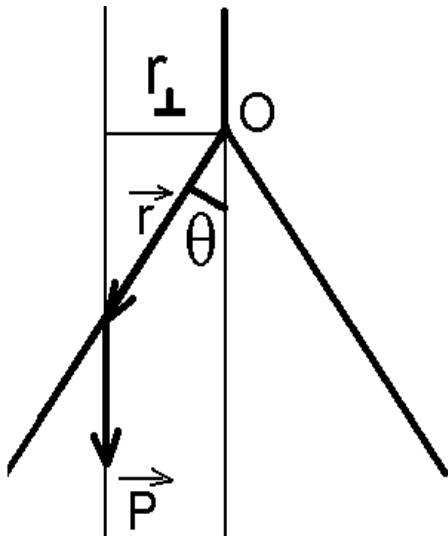
La carica elettrica si può misurare con l'elettroscopio, che è formato da un'ampolla di vetro in cui è fatto il vuoto e un'asta conduttrice che termina con due lamine sottili, anch'esse conduttrici



Se si deposita sull'asta una carica Q , questa si distribuisce sul conduttore e le due lamine si respingono, perché cariche dello stesso segno. Raggiunto l'equilibrio, la risultante dei momenti delle forze agenti sulle lamine rispetto al punto O deve essere zero:

$$\vec{\tau}_p + \vec{\tau}_e = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{F}_e = 0$$

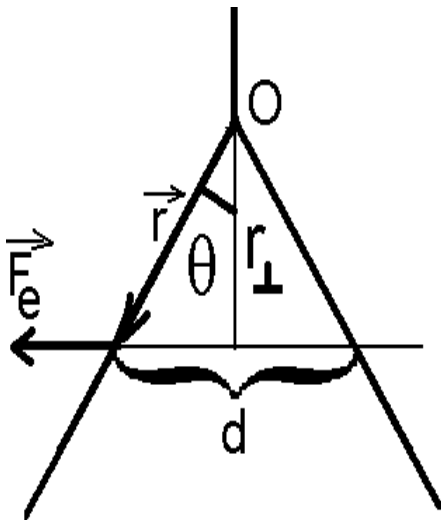
$$\vec{\tau}_p + \vec{\tau}_e = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{F}_e = 0$$



Modulo del momento della forza peso:

$$\tau_p = r_{\perp} mg = r mg \sin \theta$$

dove m e' la massa di ciascuna lamina.



Modulo del momento della forza elettrica:

$$\tau_e = r_{\perp} F_e = r F_e \cos \theta$$

I due momenti hanno stessa direzione (perpendicolare al piano del foglio) e verso opposto; scegliendo come positivo quello della forza elettrica si ha quindi

$$F_e \cos \theta - mg \sin \theta = 0$$

$$F_e = mg \tan \theta$$

F_e e' data da

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2}$$

per cui

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2} = mg \tan \theta \rightarrow Q^2 = (4\pi\epsilon_0) d^2 mg \tan \theta$$

La distanza d tra le lamine e l'angolo θ si misurano e dall'equazione precedente si ricava il valore di Q

IL CAMPO ELETTRICO

Poniamo in un punto P dello spazio una carica elettrica Q e, per semplicità, supponiamo di tenerla ferma. Una carica q_1 , posta a distanza \vec{r} , da Q sarà soggetta a una forza

$$\vec{F} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right] q_1;$$

se invece mettiamo una carica $-q_2$, la forza agente su di essa sarà

$$\vec{F} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right] (-q_2),$$

e così via, cambiando di volta in volta carica di prova. Nella formula che esprime la forza possiamo isolare una parte che deriva da quello che possiamo considerare come *sorgente*, cioè

$$\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right]$$

e che sarà sempre la stessa qualsiasi sia la carica di prova.

Diciamo dunque che la carica Q genera in tutto lo spazio un campo elettrico \vec{E} dato dalla forza diviso la carica di prova q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

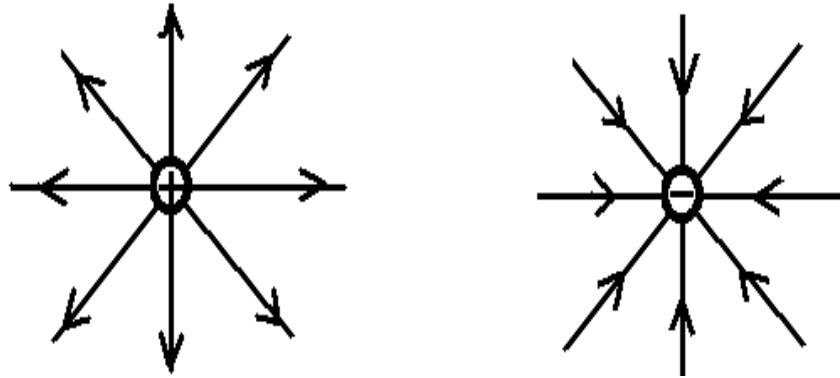
Questo vuol dire che **in ogni punto dello spazio e' definito un vettore $\vec{E}(\vec{r})$** tale che una carica qualsiasi, q_1 , posta in quel punto, sarà soggetta alla forza

$$\vec{F} = \vec{E}q_1$$

Naturalmente la situazione e' totalmente simmetrica!! Possiamo decidere che q_1 e' sorgente a sua volta di un campo elettrico

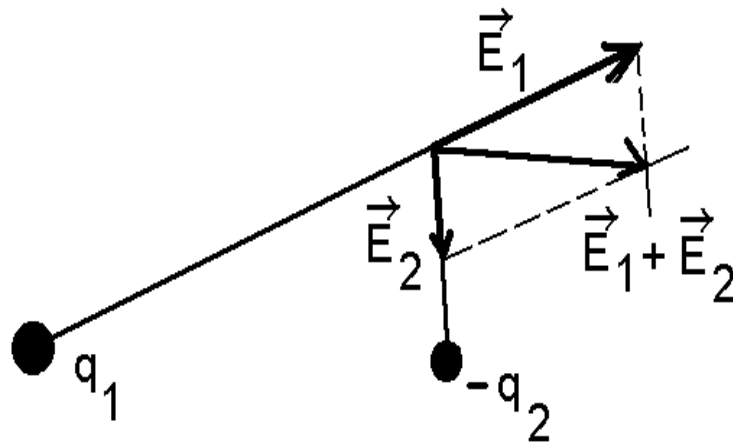
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

- Si definiscono **linee di forza** del campo elettrico, quelle curve cui il campo e' in ogni punto tangente. Il verso e' dato dal verso della forza che agirebbe sulla carica unitaria positiva messa in quel punto. Per una carica puntiforme le linee di forza sono radiali: **uscenti** se la carica e' positiva, **entranti** se e' negativa.

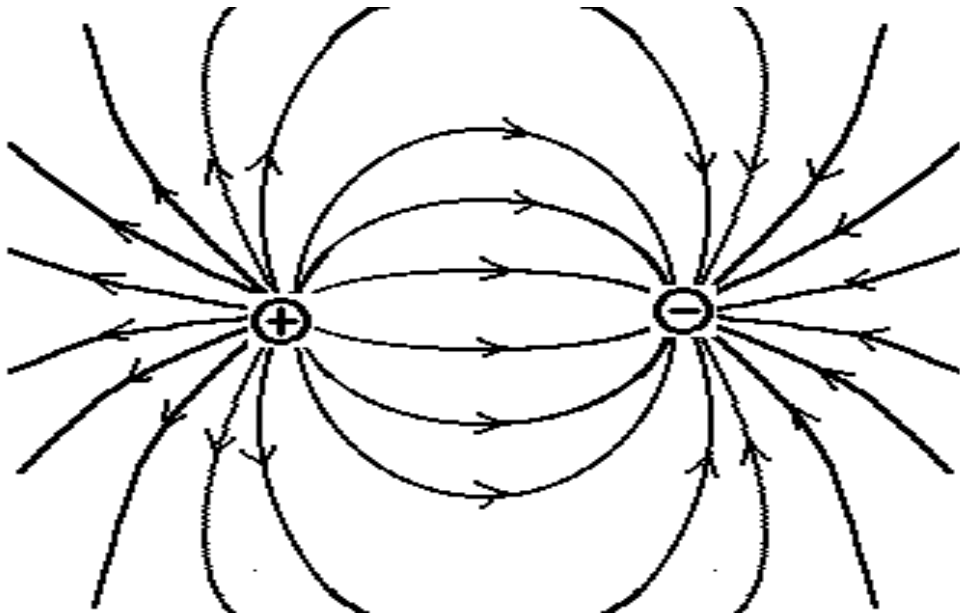
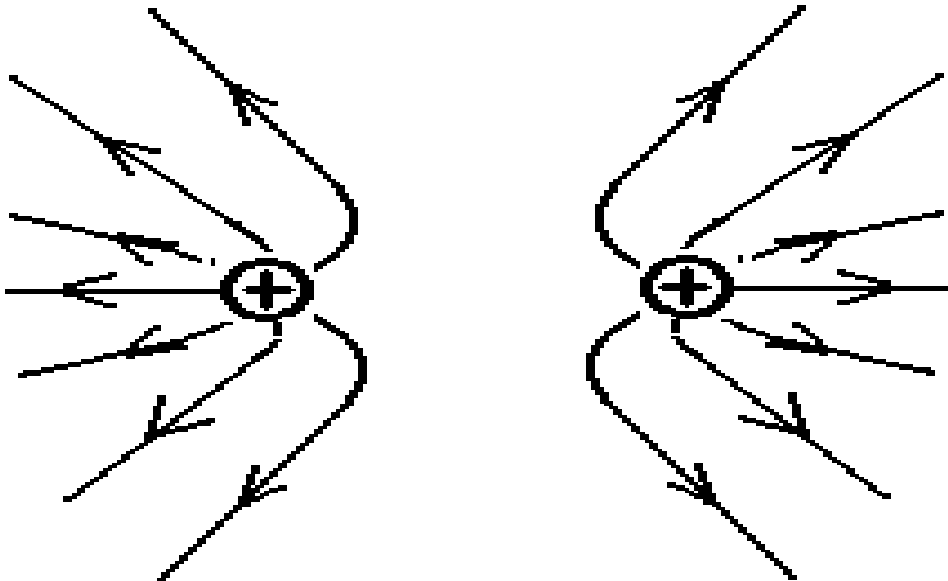


PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

- Il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche e' dato dalla somma vettoriale dei campi elettrici prodotti dalle singole cariche



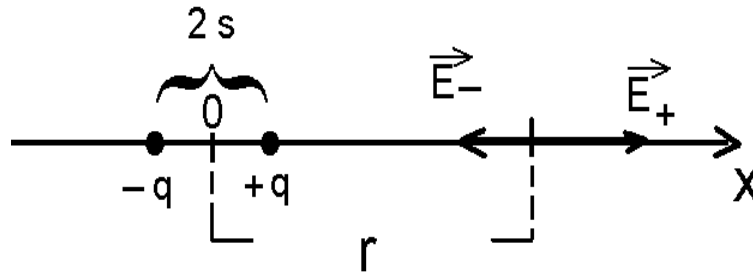
Esempi di linee di forza del campo elettrico



DIPOLO ELETTRICO

Un dipolo e' un sistema formato da due cariche elettriche uguali in modulo ma di segno opposto, separate da una distanza $2s$.

Calcoliamo il campo elettrico sull'asse del dipolo, a distanza r dal centro



$$\vec{E}_{dip} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \rightarrow \quad E_{dip} = E_+ - E_-$$

Facciamo ora l'ipotesi che la distanza a cui calcoliamo il campo sia molto maggiore della distanza tra le due cariche, $r \gg s$, e trascuriamo i termini di ordine s^2 o superiore

$$\begin{aligned} E_{dip} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(r-s)^2} - \frac{q}{(r+s)^2} \right] \\ &\sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2 - 2rs} - \frac{1}{r^2 + 2rs} \right] \\ &\sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r^2 + 2rs - r^2 + 2rs}{r^4} \right] \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4rs}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4qs}{r^3} \end{aligned}$$

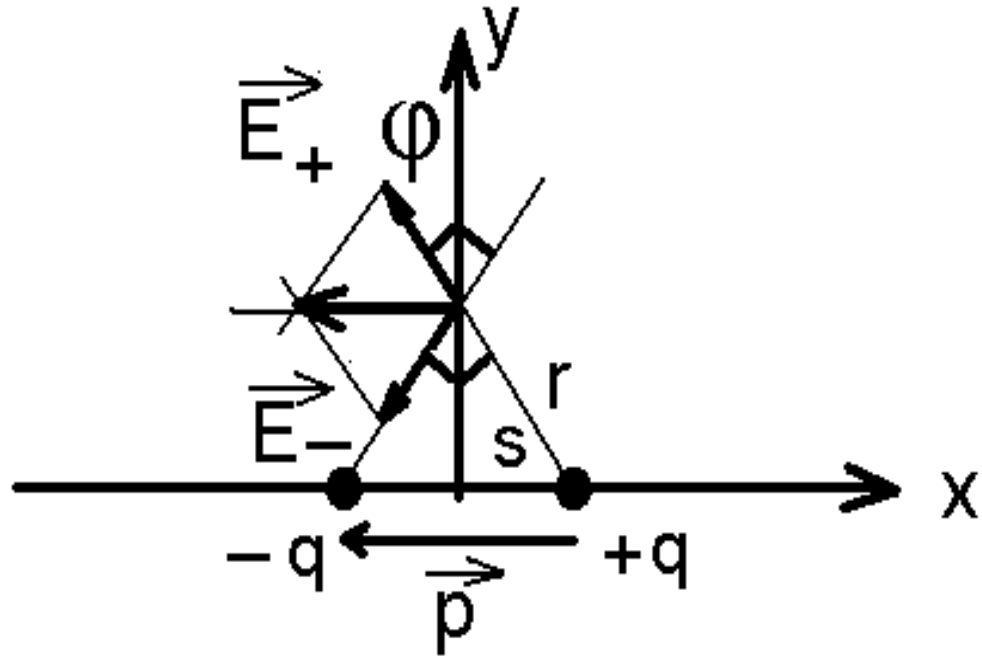
Definiamo il **momento di dipolo** \vec{p} come un vettore che unisce le due cariche, ha verso che va dalla carica positiva a quella negativa, e modulo pari a

$$p = 2sq$$

allora sull'asse

$$E_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}$$

Calcoliamo ora il campo in un punto della retta che passa per il centro del dipolo, ed e' perpendicolare a \vec{p} . Scegliamo un riferimento come indicato in figura:



$$E_{-y} + E_{+y} = 0$$

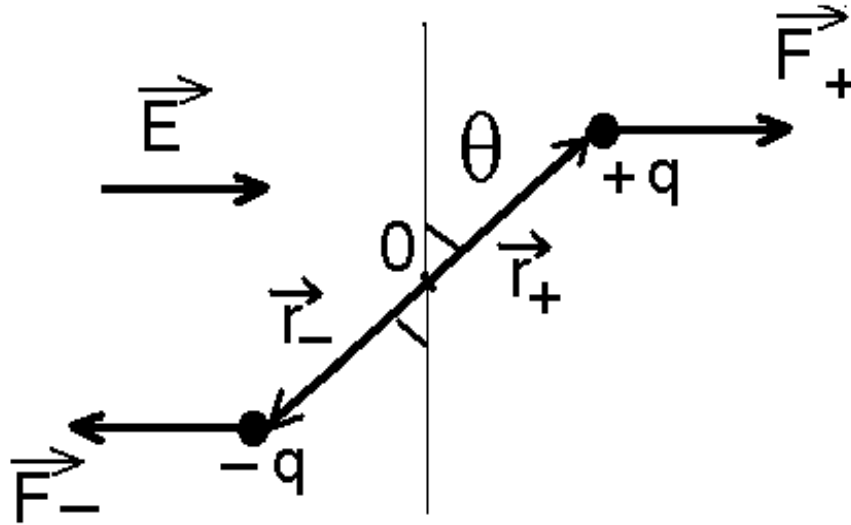
$$E_{-x} + E_{+x} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \sin \varphi}{r^2}$$

ed essendo $s = r \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi = \frac{s}{r}$

$$E_{-x} + E_{+x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qs}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}$$

Si vede dunque che il campo di dipolo sull'asse e' diretto parallelamente al momento di dipolo, e va a zero come $\frac{1}{r^3}$, cioe' piu' rapidamente del campo della carica singola ($\sim \frac{1}{r^2}$)

Cosa succede se il dipolo sta in un campo elettrico esterno \vec{E} diretto come indicato in figura?



Il dipolo sarà soggetto a una coppia di forze che tenderà a farlo ruotare in modo che si allinei con la direzione del campo.

I momenti delle forze \vec{F}_- e \vec{F}_+ che agiscono sul dipolo, calcolati rispetto al centro,

$$\vec{\tau}_- = \vec{r}_- \times \vec{F}_-, \quad \vec{\tau}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+$$

sono diretti perpendicolarmente al piano del foglio e hanno lo stesso verso (entrante); ricordando poi che $r_- = r_+ = s$, e che $F_- = F_+ = Eq$, si vede anche che hanno lo stesso modulo:

$$\tau_+ = \tau_- = Eqs \cos \theta.$$

Il modulo del momento risultante quindi è

$$\tau = 2(Eq \cos \theta s) = Ep \cos \theta$$

Il momento risultante si può scrivere, alternativamente, come

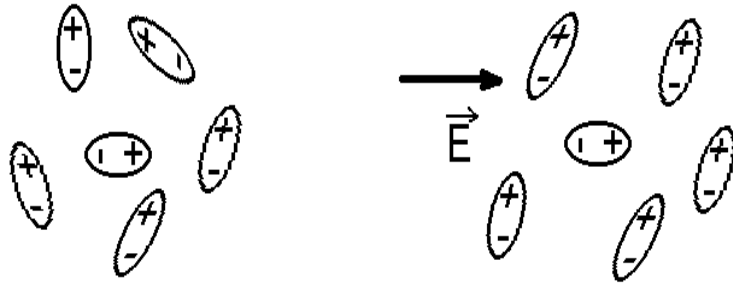
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

CAMPI ELETTRICI NELLA MATERIA

Quando “accendiamo” un campo elettrico nella materia, questa si può comportare sostanzialmente in due modi diversi.

- **Dielettrici Polari**

In alcune sostanze, come per es. l’acqua, le molecole hanno un dipolo elettrico permanente. Le molecole sono in costante agitazione termica, ma sotto l’effetto del campo esterno tendono ad allinearsi con il campo, come abbiamo dimostrato prima.



Ciascun dipolo ha un suo campo che è diretto dalla carica positiva a quella negativa, cioè ha verso opposto rispetto al campo esterno. Di conseguenza, il campo totale, cioè la somma vettoriale di quello esterno più quello dei dipoli, sarà inferiore a quello esterno. Questo è il motivo per cui il campo elettrico all’interno della materia diminuisce. Per descrivere il campo elettrico nella materia si usa il vettore **spostamento elettrico**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

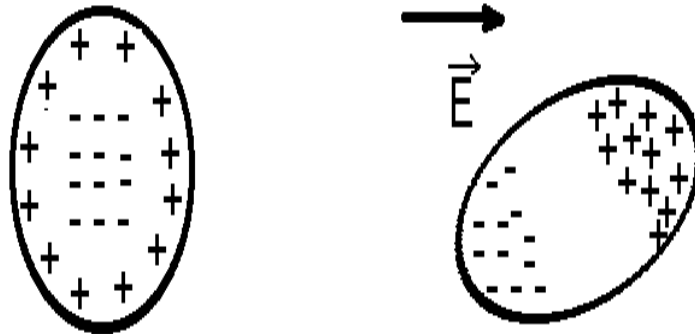
su cui torneremo in seguito.

Naturalmente questo effetto dipende dalla temperatura: quanto più essa è elevata, tanto maggiore sarà la velocità di agitazione termica delle molecole e quindi sarà più difficile per loro allinearsi con il campo esterno (detta in altro modo: se vogliamo che il dielettrico si polarizzi dobbiamo applicare un campo esterno più forte).

- **Dielettrici NON Polari**

Sono quelle sostanze che non hanno un momento di dipolo naturale, ma possono acquisirlo se sottoposte a un campo esterno per **induzione**:

la molecola si deforma leggermente e le cariche di segno opposto tendono a spostarsi ai due estremi



Formati i dipoli, questi si allineeranno come per i dielettrici polari, e il campo totale diminuirà per lo stesso motivo.

L'effetto di allineamento sarà più o meno efficiente a seconda della sostanza, e si definisce suscettività elettrica χ una grandezza che dice in pratica quanto facilmente i dipoli in media si allineano. Si definisce anche un vettore di polarizzazione

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

ALCUNI DATI

Atomo di idrogeno:

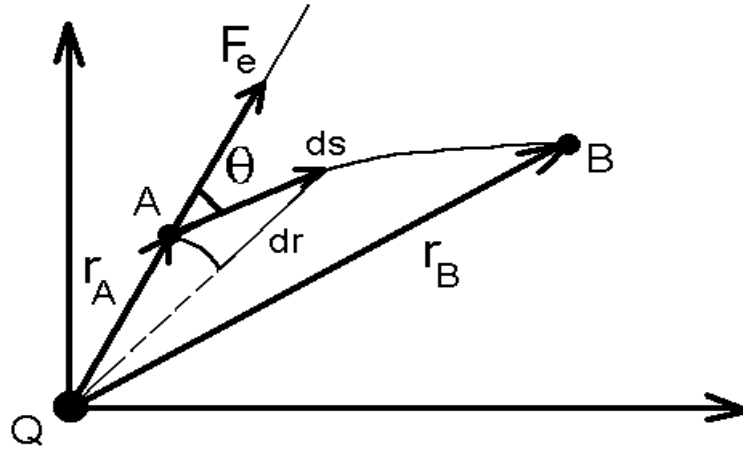
$$\begin{aligned} e &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m_e &= 0.91 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\ m_p &= 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

LA FORZA ELETTROSTATICA E' CONSERVATIVA

Come la forza gravitazionale, la forza elettrica e' conservativa

$$\vec{F} = \left[k_0 \frac{Q q}{r^2} \hat{r} \right], \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Dimostriamolo calcolando il lavoro fatto dalla forza per spostare una carica q da A a B, posti a distanza r_A e r_B dalla carica Q , lungo una traiettoria arbitraria, come indicato in figura



$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B k_0 \frac{Q q}{r^2} ds \cos \theta = k_0 Q q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\ &= -k_0 Q q \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = -k_0 \frac{Q q}{r_B} + k_0 \frac{Q q}{r_A} \end{aligned}$$

Si vede dunque che il lavoro non dipende dal cammino, ma solo dalla distanza di A e B dalla carica Q , cioe' dalla posizione iniziale e da quella finale, **C.V.D.**

Poiche' la forza e' conservativa, definiamo come al solito l'energia potenziale dalla relazione

$$L_{AB} = -\Delta U_{AB} = U(A) - U(B) \quad \rightarrow \quad \mathbf{U = k_0 \cdot \frac{Q q}{r} + cost}$$

- L'energia potenziale elettrostatica e' positiva o negativa a seconda dei segni delle cariche.
- Se si ha una distribuzione di cariche, l'energia potenziale totale sara' data dalla somma **algebraica** delle singole energie (principio di sovrapposizione).

IL POTENZIALE ELETTROSTATICO

Nello scrivere la forza tra due cariche puntiformi, Q e q , abbiamo separato una parte che deriva da quella che noi consideriamo come *sorgente*, cioè il **campo elettrostatico**, e la carica di prova q che sonda il campo

$$\vec{F} = \vec{E}q = \left[k_0 \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right] q \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Analogamente, introduciamo il **potenziale elettrostatico** generato da una carica puntiforme Q , definendolo come

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{q}} = k_0 \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{r}} + \text{cost}$$

e, così' come

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta U_{AB}, \quad (1)$$

si avra' che

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\Delta V_{AB}. \quad (2)$$

Quindi: data la forza troviamo l'energia potenziale tramite la (1), o, dato il campo, troviamo il potenziale dalla (2).

Viceversa, data l'energia potenziale troviamo la forza

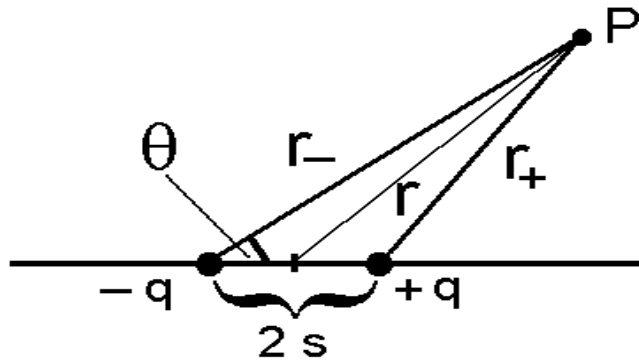
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

oppure dato il potenziale troviamo analogamente il campo.

Attenzione: come l'energia potenziale, il potenziale e' una **funzione scalare**, e il potenziale di una distribuzione di cariche sara' dato dalla somma algebrica dei singoli potenziali (principio di sovrapposizione).

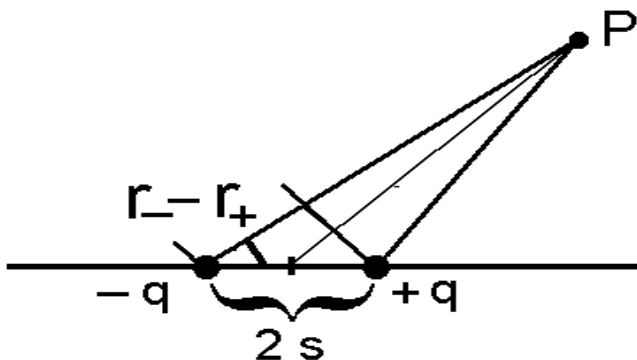
POTENZIALE ELETTROSTATICO del DIPOLO

Sfruttiamo il principio di sovrapposizione e scriviamo il potenziale del dipolo come somma dei potenziali delle singole cariche



$$V = V_+ + V_- = k_0 \frac{q}{r_+} + k_0 \frac{-q}{r_-} = k_0 q \left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = k_0 q \left[\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right]$$

Se chiamiamo r la distanza tra il punto P e il centro del dipolo, come indicato in figura, e assumiamo che $r \gg s$ possiamo dire che



$$r_- - r_+ \approx 2s \cos \theta$$

e

$$r_+ r_- \approx r^2$$

quindi il potenziale diventa

$$V = k_0 \frac{q2s \cos \theta}{r^2}$$

e ricordando che abbiamo definito il momento di dipolo \vec{p} come vettore che congiunge la carica positiva alla negativa, e che ha modulo pari a

$$p = 2sq$$

possiamo infine scrivere il potenziale del dipolo come

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cos \theta}{r^2}$$

Il campo elettrico in un punto qualsiasi si puo' allora calcolare utilizzando le relazioni

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

e ricordando che

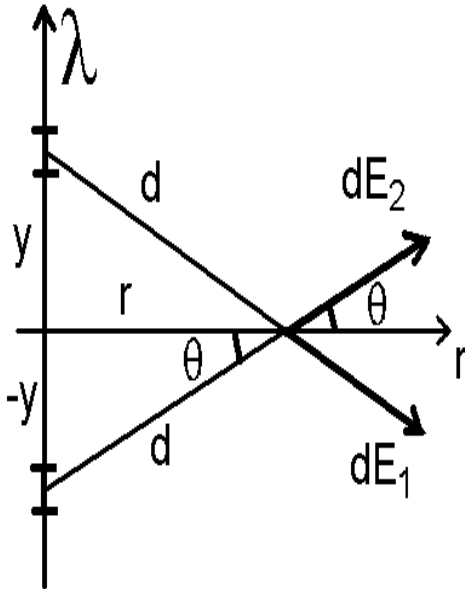
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Campo elettrico generato da un filo carico

Si consideri un filo infinito, carico con densità lineare $\lambda = \frac{dq}{dl}$. Scegliamo un riferimento con l'asse y lungo il filo come indicato in figura, e calcoliamo il campo in un punto P posto a distanza r dal filo: dovremo sommare tutti i campi generati dai trattini di filo dy su cui c'è una carica che supporremo puntiforme, $dq = \lambda dy$

$$d\vec{E} = k_0 \frac{dq}{d^2} \hat{d}$$

dove d è la distanza dell'elemento di filo dal punto P in cui calcoliamo il campo



Dato un elemento di filo dy a distanza y da O , e il suo simmetrico a distanza $-y$, le cariche poste sui due dy generano in P un campo che ha lo stesso modulo; scomponendo i due campi lungo l'asse y e lungo r , vediamo che le due componenti lungo l'asse y si annullano

$$dE_{1y} + dE_{2y} = -k_0 \frac{dq}{d^2} \sin \theta + k_0 \frac{dq}{d^2} \sin \theta = 0$$

e quelle lungo r si sommano

$$dE_{1r} + dE_{2r} = k_0 \frac{dq}{d^2} \cos \theta + k_0 \frac{dq}{d^2} \cos \theta = 2k_0 \frac{dq}{d^2} \cos \theta$$

essendo

$$d \cos \theta = r \quad \rightarrow \quad \cos \theta = r/d, \quad \text{e} \quad d = \sqrt{r^2 + y^2}$$

$$dE_{1r} + dE_{2r} = 2k_0 r \frac{dq}{d^3} = 2k_0 r \frac{\lambda dy}{(r^2 + y^2)^{3/2}}$$

e integrando tra 0 e ∞ otteniamo il campo totale

$$E_r = 2k_0 r \lambda \int_0^\infty \frac{dy}{(r^2 + y^2)^{3/2}} = 2k_0 r \lambda \left[\frac{y}{r^2 \sqrt{r^2 + y^2}} \right]_0^\infty = \frac{2k_0 \lambda}{r}$$

Dunque, **per motivi di simmetria il campo è diretto perpendicolarmente al filo, ed è uscente se il filo è carico positivamente, entrante nel caso opposto.**

Potenziale elettrico di un filo carico

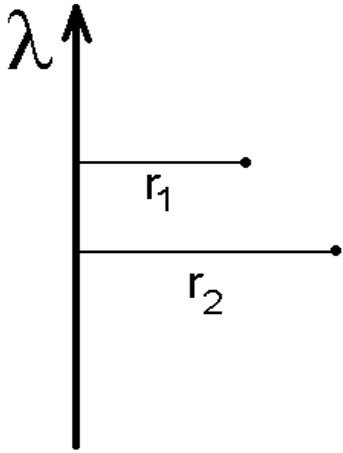
Abbiamo già calcolato il campo elettrico di un filo infinito e carico, e abbiamo visto che, data la simmetria del problema, questo sarà diretto radialmente rispetto al filo e dipenderà solo dalla distanza r dal filo stesso

$$E_r = k_0 \frac{2\lambda}{r}$$

Di conseguenza, anche il potenziale dipenderà solo da r e conviene calcolarlo a partire dal campo, utilizzando la relazione

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad \rightarrow \quad dV = -E_r dr \quad \rightarrow \quad \int_A^B dV = -\int_A^B E_r dr$$

Si avrà dunque che, per es., la differenza di potenziale tra due punti a distanza r_1 e r_2 dal filo sarà



$$\begin{aligned} V(r_2) - V(r_1) &= -2\lambda k_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \\ &= -2\lambda k_0 [\ln r]_{r_1}^{r_2} = -2\lambda k_0 \ln r_2 + 2\lambda k_0 \ln r_1 \end{aligned}$$

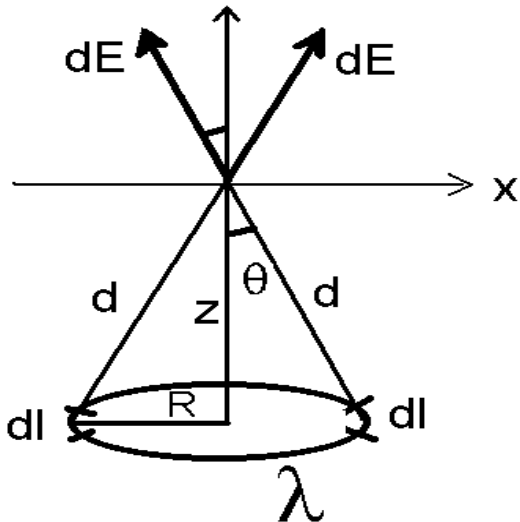
Di conseguenza il potenziale è

$$\mathbf{V(r) = -2\lambda k_0 \ln r + cost}$$

ATTENZIONE: il potenziale all'infinito diverge ($\ln r \rightarrow \infty$), e questo è dovuto al fatto che nell'integrale vengono sommati infiniti contributi ciascuno dei quali va come $\sim 1/r$. Anche il campo era stato calcolato sommando infiniti contributi dovuti ai campi generati dalle cariche dq , ma poiché il campo di una carica puntiforme va a zero più rapidamente, e cioè come $\sim 1/r^2$, la somma converge.

Campo elettrico generato da un anello carico

Calcoliamo il campo sull'asse di un anello di raggio R , carico con una densità lineare di carica $\lambda = \frac{dq}{dl}$. Sia z la distanza tra il centro dell'anello e il punto in cui calcoliamo il campo



Per ogni trattino di anello dl , che contribuisce in P con un campo

$$d\vec{E} = k_0 \frac{dq}{d^2} \hat{d},$$

ce ne sarà uno simmetrico, come indicato in figura, che genererà in P un campo uguale in modulo al precedente, e formante con l'asse z lo stesso angolo θ .

Quindi le componenti lungo l'asse z saranno uguali e si sommeranno (vedi figura), mentre quelle lungo l'asse x saranno uguali e opposte e si annulleranno.

In conclusione, il campo risultante è diretto come l'asse z , ed è la somma di tutte le componenti z dei campi generati dai trattini di filo dl

$$dE_z = k_0 \frac{dq}{d^2} \cos \theta = k_0 \lambda \frac{dl}{d^2} \cos \theta \quad \rightarrow \quad E \equiv E_z = k_0 \lambda \oint \frac{dl}{d^2} \cos \theta$$

dove \oint indica l'integrale eseguito su tutta la circonferenza.

Ma poiché d e $\cos \theta$ sono costanti, una volta fissato z ,

$$E_z = k_0 \lambda \frac{\cos \theta}{d^2} \oint dl = k_0 \lambda \frac{\cos \theta}{d^2} 2\pi R$$

Semplifichiamo l'espressione del campo

$$E_z = k_0 \lambda \frac{\cos \theta}{d^2} \oint dl = k_0 \lambda \frac{\cos \theta}{d^2} 2\pi R$$

Essendo

$$d \cos \theta = z \quad \rightarrow \quad \cos \theta = \frac{z}{d}, \quad \text{e} \quad d = \sqrt{z^2 + R^2}$$

si trova

$$E_z = k_0 \lambda \frac{z}{d^3} 2\pi R = k_0 \lambda \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R$$

e infine, essendo la carica totale sull'anello Q

$$\lambda 2\pi R = Q$$

si ha che

$$\mathbf{E}_z = k_0 Q \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

A grande distanza dall'anello $z \rightarrow \infty$ e

$$\mathbf{E}_z \rightarrow k_0 \frac{Q}{z^2}$$

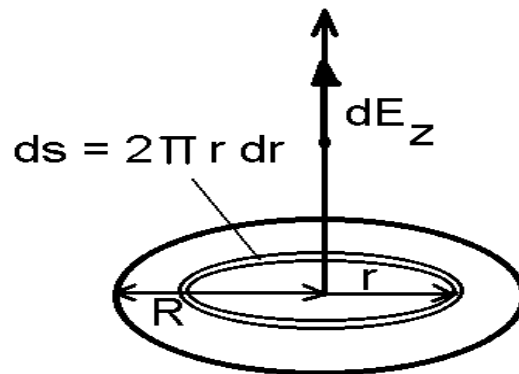
come se tutta la carica fosse concentrata nel centro.

Campo elettrico generato da un disco carico

Sia il disco carico con densità superficiale costante

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

e calcoliamo il campo sull'asse del disco a distanza z dal centro.



Dividiamo il disco in tante corone circolari di raggio r e spessore dr . Ciascuna avrà superficie

$$dS = 2\pi r dr \quad \text{e la carica su ciascuna sarà} \quad dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

Siccome ogni corona circolare può essere considerata un anello di raggio r , sappiamo, da quanto calcolato prima, che il campo da esse generato in P sarà diretto come l'asse z e pari a

$$dE_z = k_0 dq \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = k_0 \sigma 2\pi r dr \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

per cui il campo totale, ottenuto sommando i campi generati dalle corone circolari, sarà

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^R dE_z = k_0 \sigma 2\pi z \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = k_0 \sigma 2\pi z \left[-\frac{1}{\sqrt{(z^2 + r^2)}} \right]_0^R \\ &= k_0 \sigma 2\pi z \left[-\frac{1}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} + \frac{1}{z} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} \right] \end{aligned}$$

dove abbiamo sostituito $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Notiamo che se $R \rightarrow \infty$

$$E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

che come vedremo è il campo di una lastra piana infinita.

MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO

Ricordiamo che, poiché la forza elettrostatica è conservativa, possiamo definire l'energia potenziale dalla formula

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta U_{AB} \quad \rightarrow \quad U(A) - U(B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Abbiamo poi definito il potenziale elettrico come l'energia potenziale diviso la carica

$$V = \frac{U}{q} \quad \rightarrow \quad V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

per cui, il lavoro fatto per spostare una carica da A a B si può scrivere anche come

$$L_{AB} = q [V(A) - V(B)]$$

(attenzione ai segni!!)

Il potenziale si misura in **Volts**

$$\text{Volt} = \frac{J}{C}$$

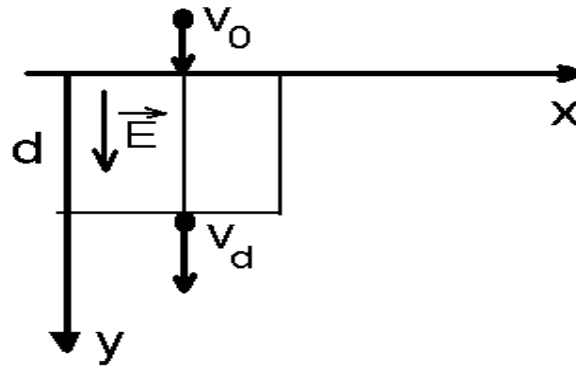
Per misurare l'energia di grandezze atomiche e subatomiche si usa come unità di misura l'**elettronvolt** così definito

1 elettronvolt è l'energia necessaria per spostare la carica elementare e attraverso la differenza di potenziale di un volt, cioè

$$1 \text{ eV} = e (1 \text{ V}) = (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (1 \text{ V}) = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

ESEMPIO

Una carica $q = 10^{-6} \text{ C}$ di massa $m = 10^{-8} \text{ kg}$ viene immessa con velocità $v_0 = 10^3 \text{ m/s}$ lungo l'asse y (vedere figura), in una regione quadrata di lato $d = 10^3 \text{ m}$ in cui c'è un campo elettrico costante, pari a $E = 200 \text{ V/m}$ diretto come l'asse y . Calcolare con che velocità la carica emerge nella zona dove il campo è nullo e che traiettoria fa



Il campo e' costante e diretto come y, quindi

$$V(0) - V(y) = \int_0^y \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^y E dy = Ey$$

Il modulo della velocita' con cui la carica esce dalla zona d si puo' calcolare dal teorema dell'energia cinetica

$$L_{0d} = \frac{1}{2}mv_d^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \rightarrow \quad qEd = \frac{1}{2}mv_d^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

quindi

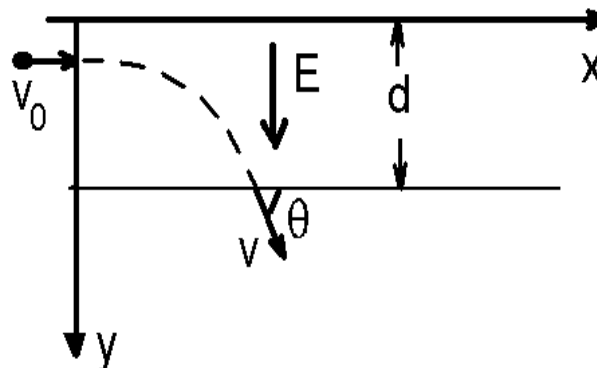
$$v_d = \sqrt{\left(v_0^2 + \frac{2}{m}qEd\right)} = \sqrt{\left(10^6 + \frac{2}{10^{-8}} 10^{-6} 200 10^3\right)} = 6403 \text{ m/s}$$

La forza e' diretta come il campo, ed essendo v_0 anch'essa nella direzione del campo la traiettoria sara' rettilinea.

Abbiamo trascurato la forza peso: e' corretto?

$$p = mg = 10^{-8} 9.8 \sim 10^{-7} \text{ N}, \quad F_{el} = qE = 10^{-6} 200 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ N} \gg p$$

Cosa accade se invece la carica viene immessa con velocita' v_0 diretta lungo l'asse x? Supponiamo che il campo sia diverso da zero nella regione $0 \leq y \leq d$ come in figura



In questo caso, scomponendo l'eq. $\vec{F} = m\vec{a}$ lungo gli assi si ha

$$\begin{aligned} a_x = 0 &\rightarrow v_x = v_0 & \text{e} & x = v_0 t \\ a_y = \frac{F_{el}}{m} = \frac{qE}{m} &\rightarrow v_y = a_y t & \text{e} & y = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned}$$

la traiettoria e' dunque un arco di parabola, e l'accelerazione lungo l'asse y vale $a_y = \frac{10^{-6} \cdot 200}{10^{-8}} = 2 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$. Quando $y = d$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_y}} = 0.316 \text{ s} \quad \text{e} \quad v_y = a_y t,$$

quindi la velocita' di uscita e'

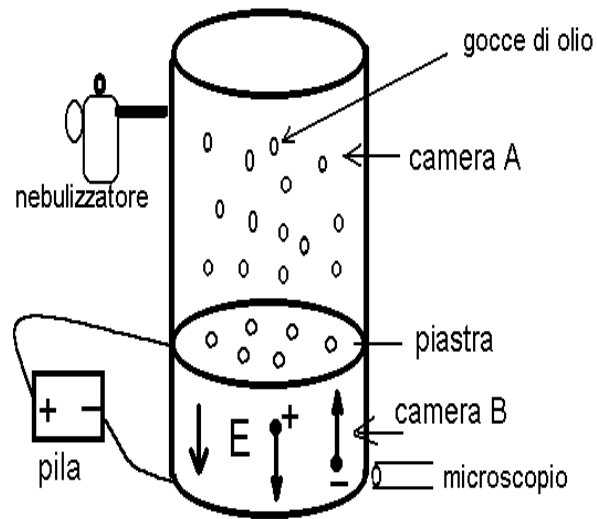
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + a_y^2 \left(\frac{2d}{a_y}\right)} = \sqrt{v_0^2 + 2da_y} = 6403 \text{ m/s}$$

che e' identica in modulo a quella del caso precedente, ma forma con l'asse x un angolo θ dato da

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0.316}{10^3} = \rightarrow \theta \sim 81^\circ$$

ESPERIENZA DI MILLIKAN

Negli anni 1910-1913 Robert Millikan fece il seguente esperimento per misurare la carica elementare



Delle goccioline di olio vengono immesse tramite un nebulizzatore nella camera A. Alcune di esse saranno cariche positivamente, altre negativamente. Nella camera B si genera un campo elettrico rivolto verso il basso. Attraverso la piastra forata P, alcune gocce passano nella camera B, dove saranno soggette alla forza elettrica $\vec{F} = q\vec{E}$, diretta verso l'alto per quelle negative e verso il basso per quelle positive. Consideriamo per es. una goccolina di massa m e carica q positiva

$$ma = qE + mg \quad \rightarrow \quad a = \frac{q}{m}E + g \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}at^2$$

quindi il tempo impiegato dalla goccia a toccare il fondo e'

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Misurando il tempo Δt e conoscendo la massa delle gocce si puo' dunque misurare la carica. Con questo esperimento Millikan dimostro' che la carica si presenta sempre in multipli interi di

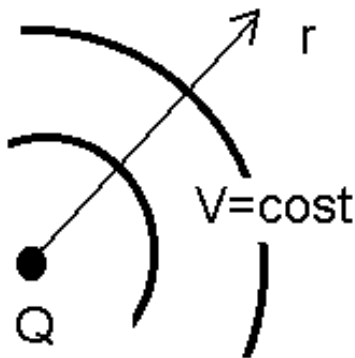
$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} C$$

e che quindi la carica e' quantizzata.

Fu insignito del premio Nobel nel 1923.

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

Definiamo **equipotenziali** le superfici su cui $V = \text{cost}$

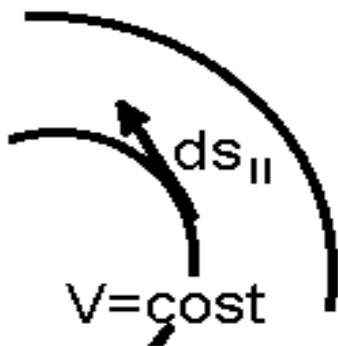


Per esempio nel caso di una carica puntiforme

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \text{cost}$$

e le superfici equipotenziali sono le sfere di raggio $r = \text{cost}$.

Se si fa uno spostamento $d\vec{s}_{\parallel}$ su una superficie equipotenziale si avr  che $dV = 0$, quindi essendo



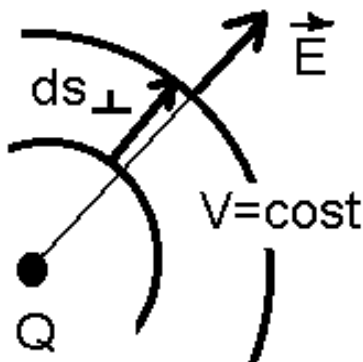
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s},$$

segue che

$$\vec{E} \cdot d\vec{s}_{\parallel} = 0$$

e cioe', il campo \vec{E} e' **sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali** (infatti per es. nel caso della carica puntiforme e' radiale).

Supponiamo invece di fare uno spostamento $d\vec{s}_{\perp}$ perpendicolare a una superficie equipotenziale, quindi lungo la direzione di \vec{E} , e **nello stesso verso di \vec{E}**



$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}_{\perp} = -E ds_{\perp}$$

quindi $dV < 0$, e questo vuol dire che se mi muovo nella direzione del campo vado da superfici a potenziale maggiore a superfici a potenziale minore. Detto in altre parole **il campo e' diretto nel senso delle V decrescenti**

Questo vuole anche dire che una carica positiva, che si muove nello stesso verso del campo elettrico ($\vec{F} = q\vec{E}$), va da punti a potenziale maggiore a quelli a potenziale minore, e viceversa per una carica negativa.

TEOREMA DI GAUSS

Sappiamo che per trovare il campo generato da piu' cariche puntiformi possiamo usare il **Principio di Sovrapposizione** e sommare vettorialmente i campi associati a ciascuna carica.

Sempre utilizzando il Principio di Sovrapposizione, abbiamo visto che anche nel caso di distribuzioni continue di carica, il campo totale si trova sommando i contributi infinitesimi dovuti alle cariche elementari dq , anche se la sua espressione esplicita si puo' ricavare solo in condizioni di particolare simmetria (filo infinito, anello, disco).

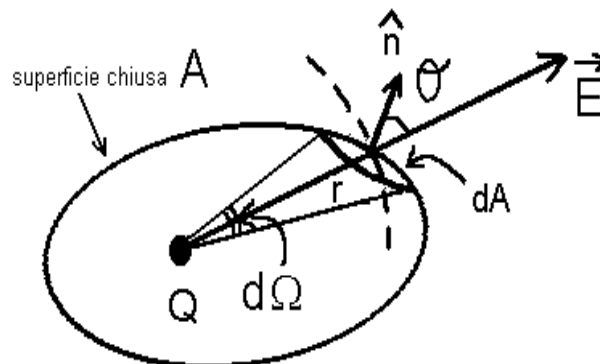
Un metodo estremamente efficace per determinare il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche e' fornito dal **teorema di Gauss** che ora dimostreremo.

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie CHIUSA e' pari alla somma delle cariche contenute DENTRO la superficie, diviso per ϵ_0 . Le sorgenti esterne alla superficie non danno alcun contributo al flusso.

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0}$$

dove dA e' un elemento della superficie e \hat{n} e' il versore normale a dA .

Sia Q una carica e A una superficie arbitraria che la circonda



Consideriamo un elemento di superficie dA , chiamiamo $d\Omega$ l'angolo solido che lo sottende, e calcoliamo il flusso elementare

$$d\Phi(\vec{E})_A = \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E dA \cos \theta.$$

NOTARE CHE: siccome il numero di linee di forza che attraversano la superficie unitaria ad esse perpendicolare e' proporzionale all'intensita' del campo, $\vec{E} \cdot \hat{n} dA$ e' in pratica il numero di linee di forza che attraversano dA .

$dA \cos \theta$ e' la proiezione dell'elemento di superficie dA sulla sfera con centro in Q e raggio r che e' tratteggiata in figura

$$dA \cos \theta = dA_{\perp} \quad \text{dove} \quad dA_{\perp} = r^2 d\Omega,$$

quindi sostituendo si trova

$$d\Phi(\vec{E})_A = E r^2 d\Omega \quad (3)$$

Poiche' il campo generato dalla carica puntiforme e' $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$ nella (3) r^2 compare sia a numeratore che a denominatore e quindi si semplifica

$$d\Phi(\vec{E})_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad \rightarrow \quad \Phi(\vec{E})_A = \oint \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrale su tutto l'angolo solido e'

$$\oint d\Omega = 4\pi.$$

CVD

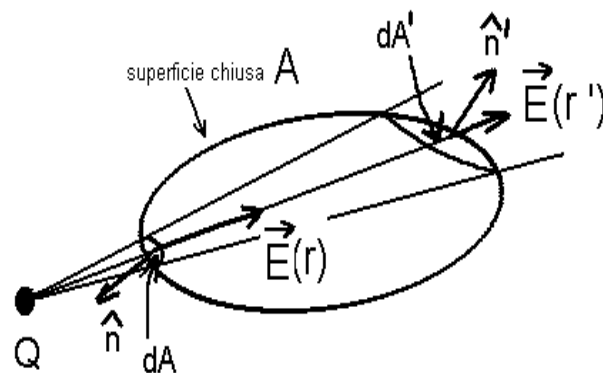
Abbiamo dunque trovato che

$$\Phi(\vec{E})_A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Se all'interno della superficie ci sono piu' cariche, per il Principio di Sovrapposizione il campo totale sara' la somma dei singoli campi, e per ciascuno varra' la (4), quindi in generale

$$\Phi(\vec{E})_A = \frac{\Sigma Q}{\epsilon_0}$$

Se una carica e' esterna alla superficie, per ogni dA intercettato sulla superficie, ci sara' un dA' dalla parte opposta, come indicato in figura



e i rispettivi contributi al flusso saranno

$$\begin{aligned}d\Phi(\vec{E})_1 + d\Phi(\vec{E})_2 &= \vec{E}(r) \cdot \hat{n} dA + \vec{E}(r') \cdot \hat{n}' dA' \\ &= -E(r) dA \cos\theta + E(r') dA' \cos\theta' = -E(r) dA_{\perp} + E(r') dA'_{\perp}\end{aligned}$$

(notare che il segno meno deriva dal fatto che il campo e' entrante in dA , ma uscente in dA' , quindi forma con la normale angoli diversi). Dalla geometria euclidea sappiamo che

$$dA_{\perp} = r^2 d\Omega \quad \text{e} \quad dA'_{\perp} = r'^2 d\Omega,$$

e poiche' $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$ e $E(r') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r'^2}$ vediamo che

$$d\Phi(\vec{E})_1 + d\Phi(\vec{E})_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{Q}{r^2} r^2 d\Omega + \frac{Q}{r'^2} r'^2 d\Omega \right] = 0$$

Estendendo il ragionamento a tutta la superficie si ha infine che il flusso associato a una carica esterna e' zero. In termini di linee di forza si puo' dire che il flusso del campo generato da una carica esterna alla superficie e' nullo perche' tante linee di forza entrano e tante ne escono.

NOTARE CHE: la forza gravitazionale ha lo stesso andamento del tipo $1/r^2$ della forza di Coulomb,

$$\vec{E}_{grav} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

quindi anche per la gravita' vale il teorema di Gauss

$$\Phi(\vec{E}_{grav})_A = -4\pi G \sum M$$

All'interno di un conduttore carico e in equilibrio, il campo elettrico e' nullo.

Se cosi' non fosse, le cariche di conduzione sarebbero soggette alla forza

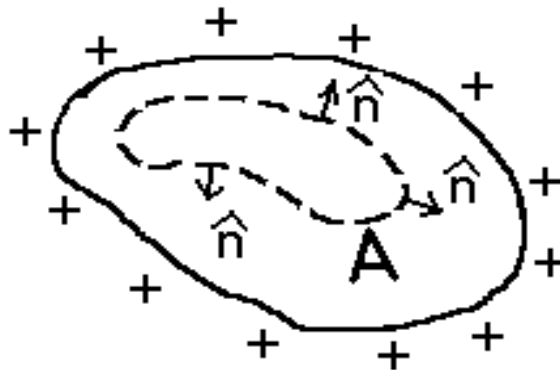
$$\vec{F} = q\vec{E}_{interno}$$

e si muoverebbero : **quindi il conduttore non sarebbe in equilibrio**

Essendo $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$, segue che il potenziale e' costante.

Prendiamo ora una qualsiasi superficie chiusa all'interno del conduttore e calcoliamo il flusso di $\vec{E}_{interno}$ attraverso di essa

$$\Phi(\vec{E}_{interno})_A = \oint \vec{E}_{interno} \cdot \hat{n} dA$$



ma il campo e' zero, quindi

$$\Phi(\vec{E}_{interno})_A = 0$$

e siccome per il teorema di Gauss

$$\Phi(\vec{E}_{interno})_A = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

segue che la carica all'interno e' anch'essa zero, cioe'

in un conduttore in equilibrio, la carica all'interno e' zero.

QUINDI, se forniamo a un conduttore una carica Q , essa si deve disporre tutta in superficie

Ma in che modo?

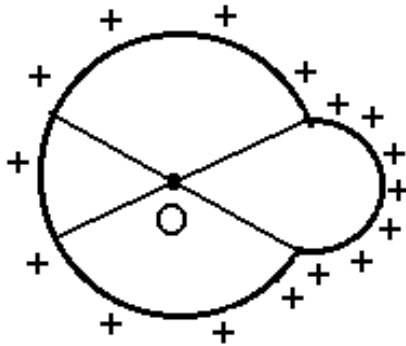
La superficie di un conduttore carico e in equilibrio deve essere equipotenziale

Infatti se tra due punti ci fosse una differenza di potenziale le cariche si muoverebbero: le positive dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore e viceversa per le cariche negative; **quindi il conduttore non sarebbe in equilibrio!!**

CONSEGUENZA

Poiche' il campo elettrico e' sempre diretto perpendicolarmente alle superfici equipotenziali, esso sara' perpendicolare alla superficie del conduttore. D'altra parte, se il campo avesse componenti tangenti alla superficie, le cariche si muoverebbero su di essa, e di nuovo il conduttore non sarebbe piu' in equilibrio.

Un'altra conseguenza interessante del fatto che il campo interno a un conduttore e' nullo e' la seguente. Supponiamo di avere una sfera conduttrice con una piccola protuberanza come indicato in figura.



Sia la sfera carica e in equilibrio. Il campo al centro deve essere zero (come in ogni altro punto interno), quindi le cariche sulla superficie a sinistra devono generare in O un campo che bilancia quello generato dalle cariche sulla superficie a destra.

Pero', le cariche che stanno sulla protuberanza sono piu' lontane da O, quindi affinche' il campo sia bilanciato devono essercene di piu', cioe' **la densita' superficiale di carica cresce al diminuire del raggio di curvatura**. Questo e' il motivo per cui sulle punte conduttrici la densita' di carica e quindi il campo elettrico sono molto piu' elevati.

RIEPILOGANDO

Dato un conduttore carico **in equilibrio**

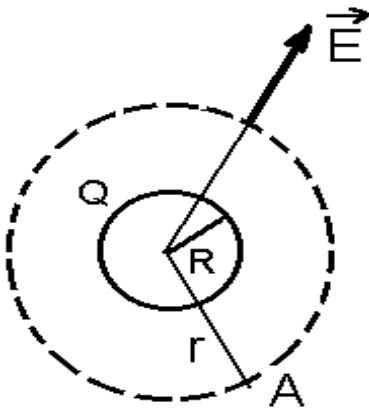
- Il campo all'interno è zero e quindi la carica interna è nulla
- La carica si dispone tutta in superficie
- La superficie di un conduttore è equipotenziale, quindi
- Il campo sulla superficie di un conduttore è perpendicolare alla superficie stessa.
- Sulle punte conduttrici la densità di carica e quindi il campo elettrico sono molto elevati.

Come scegliere la superficie chiusa per applicare il teorema di Gauss?

La superficie va scelta rispettando le simmetrie del sistema.

Dove sia possibile, conviene fare in modo che il campo sia perpendicolare alla superficie o a parti di essa.

Per esempio, supponiamo di voler ricavare l'espressione del campo **all'esterno** di una sfera conduttrice di raggio R , sulla cui superficie ci sia una carica Q . Per motivi di simmetria il campo sarà diretto radialmente e dipenderà solo da r , quindi, se vogliamo applicare il teorema di Gauss per calcolare $\vec{E}(r)$ la cosa più sensata è scegliere una superficie sferica, cosicché $\vec{E}(r)$ sarà parallelo



alla normale e si avrà'

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint E(r) dA$$

Essendo poi $E(r)$ costante sulla superficie

$A = 4\pi r^2$, si può portare fuori dall'integrale

$$\Phi(\vec{E})_A = E(r) \oint dA = E(r) 4\pi r^2$$

Dunque, se Q è la carica totale contenuta

all'interno della superficie di integrazione A , per il teorema di Gauss si avrà'

$$\Phi(\vec{E})_A = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R$$

Naturalmente il risultato non cambierebbe se la carica Q fosse distribuita anche all'interno della sfera, e cioè se questa fosse **isolante**.

Quindi il campo esterno a una distribuzione sferica di carica, è uguale a quello che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel centro.

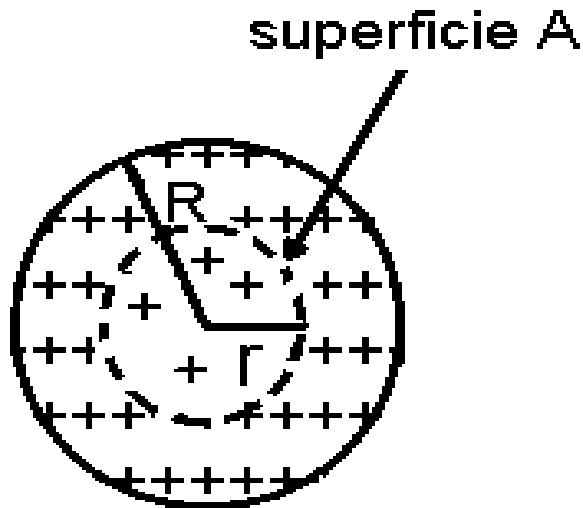
All'interno, se la sfera è conduttrice sappiamo che il campo deve essere nullo. Ma se è isolante?

Campo elettrico all'interno di una sfera isolante carica uniformemente

Sia ρ la carica contenuta nell'unita' di volume

$$\rho = \frac{dQ}{dv}$$

e prendiamo come superficie gaussiana una superficie sferica di raggio $r < R$.



Come nel caso precedente si avra'

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint E(r) dA = E(r) 4\pi r^2$$

ma ora la carica Q contenuta all'interno della superficie di integrazione A sara'

$$Q = \rho v(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

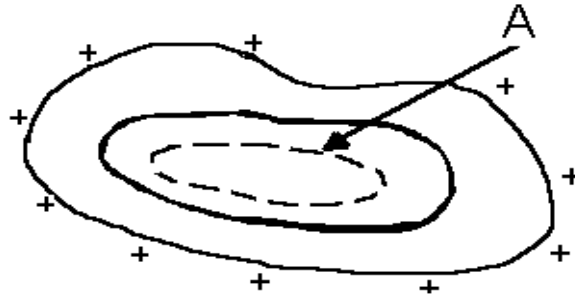
per cui

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi r^3}{3} \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

quindi il campo all'interno di una sfera isolante carica e' **proporzionale alla distanza dal centro.**

Campo elettrico all'interno di un conduttore cavo

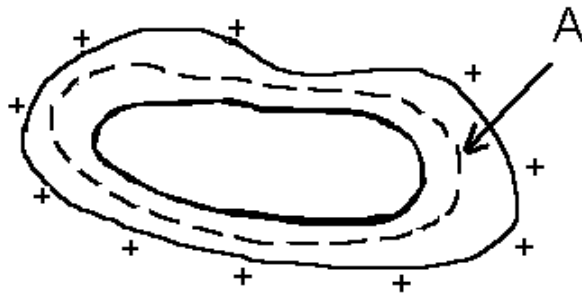
Si consideri un conduttore con una cavita' interna come indicato in figura



Se applichiamo il teorema di Gauss prendendo una superficie gaussiana interna alla cavita', vediamo che, essendo nulla la carica contenuta nella superficie, il campo sara' nullo. Infatti

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = 0.$$

Prendiamo poi una superficie gaussiana che sia all'interno del conduttore e che circondi la cavita'



In questo caso siccome il campo all'interno di un conduttore in equilibrio e' nullo, il flusso attraverso A sara' nullo e quindi anche la carica contenuta in A . Quindi concludiamo che non ci sara' carica netta all'interno della cavita'.

In conclusione:

All'interno di una cavita' praticata all'interno di un conduttore il campo e' nullo (quindi il potenziale e' costante) e la carica e' nulla.

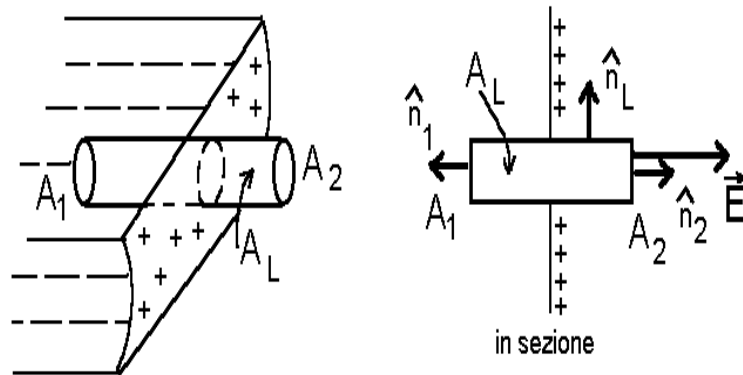
In pratica si e' ottenuto uno schermo elettrostatico: qualsiasi carica venga fornita dall'esterno al conduttore, il campo nella cavita' non ne risentira' minimamente.

Teorema di Coulomb: Campo elettrico nelle vicinanze di un conduttore

Si abbia un conduttore carico con densità superficiale

$$\sigma = \frac{dQ}{dS},$$

e si voglia calcolare il campo nelle sue immediate vicinanze. Siccome il campo sulla superficie del conduttore è perpendicolare ad essa, possiamo assumere che continui ad avere la stessa direzione anche nelle immediate vicinanze, quindi, per applicare il teorema di Gauss scegliamo una piccola superficie cilindrica con basi parallele alla superficie del conduttore come indicato in figura



siano A_1 e A_2 le due basi del cilindro, una dentro e l'altra fuori del conduttore, e A_L la superficie laterale. Possiamo suddividere il calcolo del flusso come segue

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{A_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_L} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$

Ma

$$\int_{A_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{E} = 0 \quad \text{all'interno}$$

$$\int_{A_L} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad \text{perché} \quad \vec{E} \cdot \hat{n}_L = 0$$

quindi

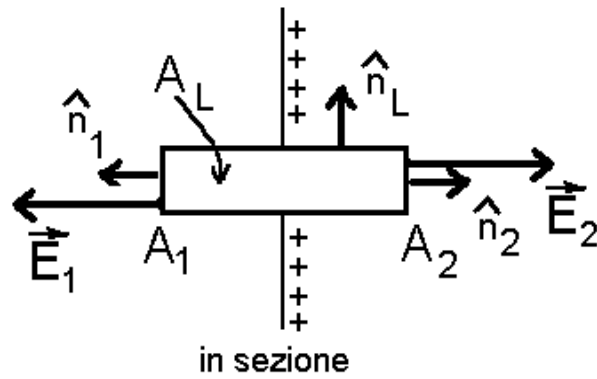
$$\Phi(\vec{E})_A = \int_{A_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA.$$

Se prendiamo A_2 abbastanza piccola in modo tale che il campo su di essa possa essere considerato costante,

$$\Phi(\vec{E})_A = E A_2,$$

Riscriviamo

$$\Phi(\vec{E})_A = EA_2$$



La superficie gaussiana intercetta sulla superficie del conduttore un'area pari ad A_2 , quindi la carica contenuta al suo interno e' $Q = \sigma A_2$. Dal teorema di Gauss segue che

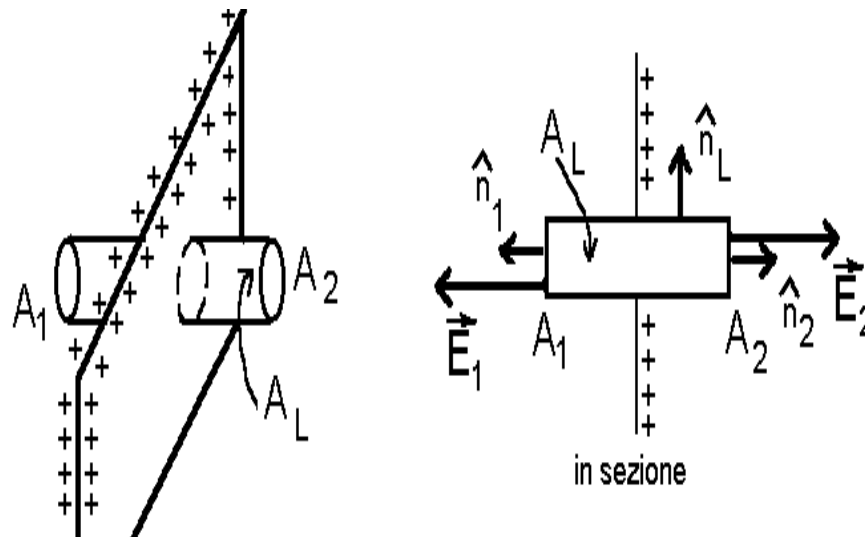
$$EA_2 = \frac{\sigma A_2}{\epsilon_0},$$

cioe' infine

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{campo nelle vicinanze di un conduttore}$$

Il campo sara' uscente se il conduttore e' carico positivamente, entrante nel caso opposto.

Campo nelle vicinanze di uno strato conduttore



L'unica differenza con il caso precedente è che il campo è diverso da zero da entrambi i lati dello strato, quindi scegliendo la superficie chiusa come prima e ricordando che la normale \hat{n} per convenzione è sempre diretta verso l'esterno

$$\Phi(\vec{E})_A = \int_{A_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E_1 A_1 + E_2 A_2$$

ed essendo $E_1 = E_2$ e $A_1 = A_2$,

$$\Phi(\vec{E})_A = 2E_2 A_2 \quad \rightarrow \quad 2E_2 A_2 = \frac{\sigma A_2}{\epsilon_0},$$

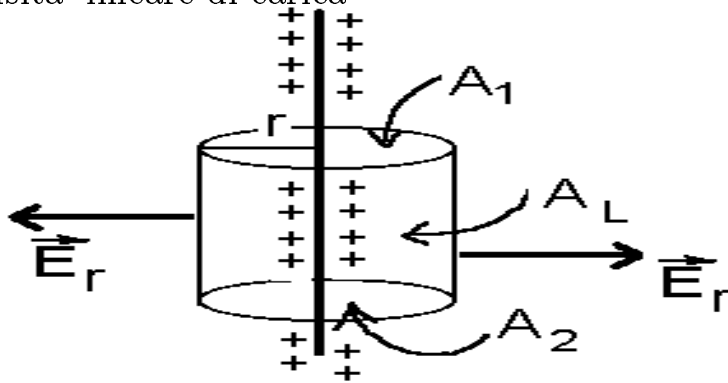
cioè **il campo nelle vicinanze di uno strato conduttore è**

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Se il piano conduttore o lo strato sono piani e infiniti, per motivi di simmetria, il campo sopra derivato varrà a una distanza qualsiasi dal conduttore e non solo nelle sue vicinanze.

Campo elettrico generato da un filo infinito carico

Vogliamo calcolare il campo elettrico generato da un filo infinito carico con densità lineare di carica



$$\lambda = \frac{dQ}{dl}$$

Per simmetria sappiamo che il campo sarà diretto radialmente e dipenderà solo dalla distanza r dal filo, quindi conviene scegliere come superficie gaussiana un cilindro di altezza h e raggio di base r come indicato in figura. Se A_L è la superficie laterale e A_1 e A_2 le due aree di base, si avrà

$$\Phi(\vec{E})_A = \int_{A_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_L} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{A_L} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(r) A_L,$$

dato che il campo è perpendicolare a \hat{n}_1 e a \hat{n}_2 e parallelo a \hat{n}_L . Essendo poi

$$A_L = 2\pi r h$$

ed essendo la carica contenuta all'interno del cilindro pari a

$$Q = \lambda h,$$

per il teorema di Gauss si trova

$$E(r) A_L = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

e infine

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

che coincide con quello già trovato applicando il principio di sovrapposizione.

CAPACITA' di un conduttore

La capacita' di un conduttore e' definita come

$$C = \frac{Q}{V - V(\infty)}$$

dove V e' il potenziale a cui si trova il conduttore su cui e' depositata la carica Q .

Per esempio, dato un conduttore sferico di raggio R , sappiamo dal teorema di Gauss che il campo e' lo stesso che si avrebbe se la carica fosse concentrata nel centro

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \rightarrow \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + cost$$

e

$$V(R) - V(\infty) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

quindi la capacita' e' costante e pari a

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

L'unita' di misura della capacita' e' il **Farad**

$$1Farad = \frac{1 Coulomb}{1 Volt}$$

La capacita' e' una misura di quanta carica si puo' mettere su un conduttore a un certo potenziale fissato

Lavoro fatto per caricare un conduttore

Il lavoro infinitesimo fatto per trasportare dall'infinito alla superficie di un conduttore che si trova a potenziale V una carica dq e', per definizione di potenziale

$$dL = -dq [V - V(\infty)]$$

e se sul conduttore e' stata gia' depositata una carica q la sua capacita' e'

$$C = \frac{q}{V - V(\infty)} \quad \rightarrow \quad dL = -dq \frac{q}{C}$$

quindi per caricare un conduttore fino a che raggiunga la carica Q il lavoro da fare e'

$$L = - \int_0^Q dq \frac{q}{C} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Di conseguenza l'energia immagazzinata in un conduttore e'

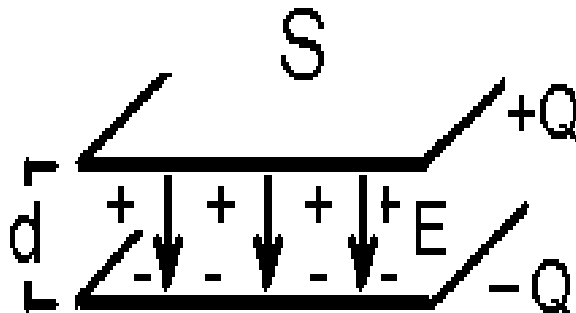
$$\Delta U = -L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ci poniamo ora il seguente problema: vogliamo immagazzinare la quantita' di carica piu' grande possibile a un potenziale fissato. Come fare?

Dalla definizione di capacita' si vede che dobbiamo fare in modo che C sia il piu' grande possibile. Vediamo come.

CONDENSATORI

Un condensatore e' un dispositivo che serve a immagazzinare carica, quindi energia. Cominciamo con il caso piu' semplice, il condensatore piano. E' formato da due lastre conduttrici piane e parallele, dette **armature**, separate da una distanza d , su cui e' depositata una carica $+Q$ e $-Q$ rispettivamente, in condizione di induzione completa, cioe' tale che le linee di forza del campo che escono dalla lastra carica positivamente finiscano tutte in quella carica negativamente. Il campo sara' perpendicolare alle armature e diretto da quella positiva a quella negativa.

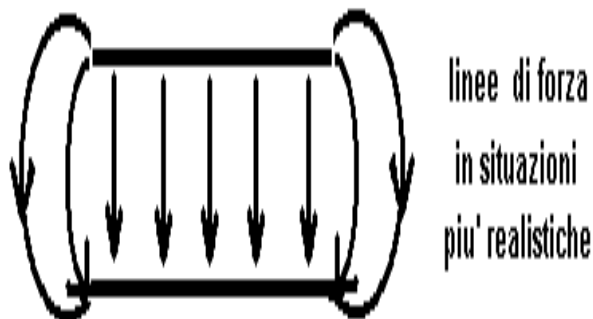


Per il momento assumiamo che tra le due armature ci sia il vuoto, e sia S la superficie di ciascuna armatura e

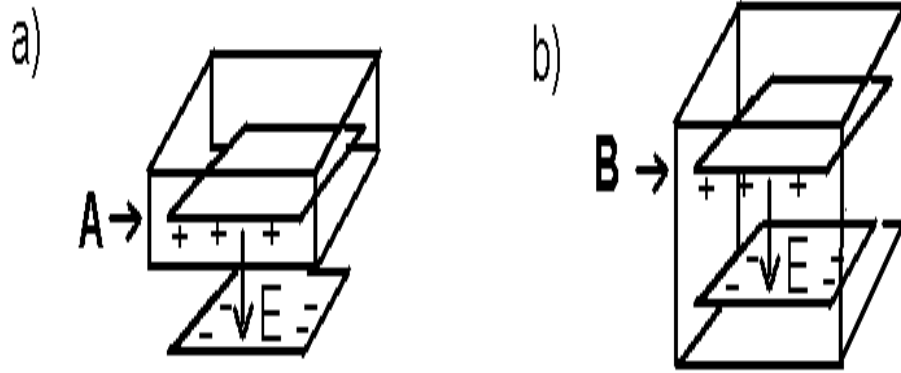
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

la densita' superficiale di carica.

Nella realta' l'induzione completa non e' realizzabile vicino ai bordi, e di conseguenza il campo in quella zona non e' perfettamente costante e perpendicolare alle armature, ma nel seguito trascureremo questi effetti.



Per trovare il campo tra le armature, calcoliamo il flusso di \vec{E} attraverso la superficie chiusa A (vedi figura (a)) e applichiamo il teorema di Gauss



$$\Phi(\vec{E})_A = SE, \quad \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

Se invece prendiamo la superficie gaussiana B che includa entrambe le armature (vedi figura (b)), troviamo che essendo la carica al suo interno pari a $+Q - Q = 0$, il campo all'esterno del condensatore e' nullo.

La differenza di potenziale tra le due armature sara'

$$|\Delta V| = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

e la capacita' del condensatore

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Notiamo subito che prendendo S molto grande o d molto piccola possiamo rendere la capacita' grande, che e' quello che volevamo.

Notiamo inoltre che la capacita' dipende dalle caratteristiche geometriche del condensatore: superficie e distanza tra le armature.

Perche' diciamo che nel condensatore si immagazzina energia?

Lavoro fatto per caricare un condensatore

Seguiamo la stessa procedura usata per calcolare il lavoro fatto per caricare un conduttore, solo che ora anziché portare la carica dq dall'infinito alla superficie del conduttore, la porteremo da un'armatura all'altra, attraverso la differenza di potenziale ΔV .



$$dL = -dq\Delta V$$

e se sul condensatore è stata già depositata una carica q la sua capacità è

$$C = \frac{q}{|\Delta V|} \rightarrow dL = -dq\frac{q}{C}$$

quindi per caricare il condensatore fino a che raggiunga la carica Q il lavoro da fare è

$$L = -\int_0^Q dq\frac{q}{C} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Di conseguenza nel condensatore viene immagazzinata un'energia pari a

$$\Delta U = -L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Essendo $C = \frac{Q}{\Delta V}$ l'energia immagazzinata è anche

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q \Delta V$$

Nel caso di un condensatore piano $\Delta V = E d$ quindi

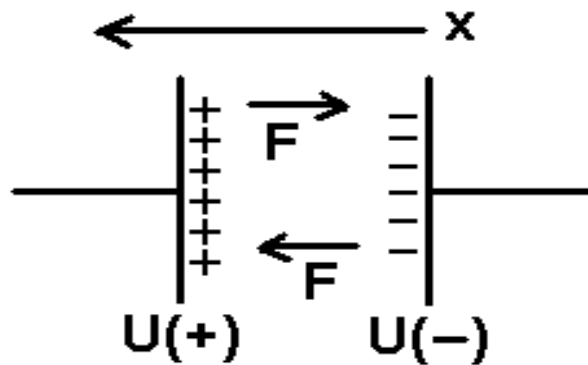
$$\Delta U = \frac{1}{2}(\sigma S)(E d) = \frac{1}{2}(E \epsilon_0 S)(E d) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2(Sd)$$

Ma Sd è il volume tra le armature del condensatore, quindi la densità di energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore è

$$\frac{\text{energia}}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2,$$

cioè è proporzionale al quadrato del campo. Sebbene l'abbiamo ricavata per un condensatore piano, la formula della densità di energia del campo elettrostatico ha validità generale.

Forza tra le armature di un condensatore



Abbiamo visto che la differenza di energia potenziale tra le due armature del condensatore e'

$$\Delta U = U(+)-U(-)=\frac{1}{2}Q \Delta V$$

quindi, se per es. prendiamo l'armatura - come riferimento, possiamo scrivere l'energia potenziale all'interno del condensatore come

$$U(x)=\frac{1}{2}Q[V(x)-V(-)]$$

dove x e' la distanza dall'armatura di riferimento. Nel caso considerato di condensatore piano, il campo all'interno e' costante e

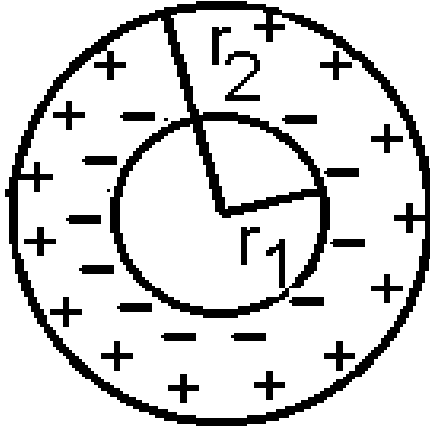
$$V(x)-V(-)=Ex \rightarrow U(x)=\frac{1}{2}QEx$$

La forza con cui le armature si attraggono sara'

$$F_x=-\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{2}QE$$

Condensatore sferico

I condensatori possono avere forma diversa. Consideriamo due superfici sferiche conduttrici concentriche di raggio r_1 e r_2 . In questo caso l'induzione sarà sicuramente completa. Sia, per esempio, l'armatura esterna carica positivamente con carica $+Q$ e quella interna carica con $-Q$.



Il campo totale all'interno sarà quello generato dalla sola carica negativa (dal teorema di Gauss) e in modulo vale

$$E = E_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

e quindi la ddp tra le armature è

$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\end{aligned}$$

La capacità del condensatore quindi è

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

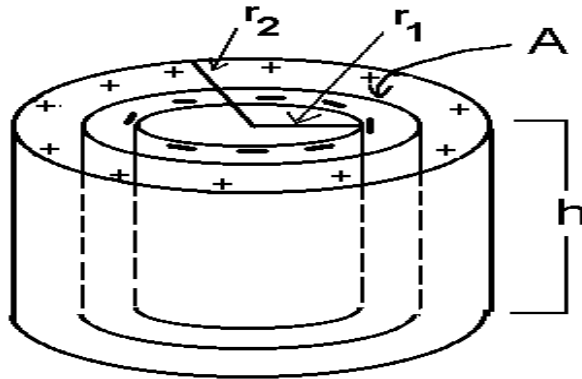
ed è tanto più grande tanto minore è la distanza tra le due armature.

Condensatore cilindrico

Un condensatore cilindrico e' formato da due superfici conduttrici cilindriche, coassiali, di raggio r_1 e r_2 e di altezza h . Sia λ carica per unita' di lunghezza sulle armature

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{cost}$$

Il campo tra le due armature si trova utilizzando il teorema di Gauss, considerando una superficie gaussiana cilindrica come indicato in figura. Il campo per motivi di simmetria e' diretto radialmente (lontano dai bordi)



$$\Phi(\vec{E})_A = \int_{A_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{A_L} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{A_L} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = E(r) A_L$$

ed essendo la carica contenuta all'interno del cilindro pari a $Q = \lambda h$, per il teorema di Gauss si trova

$$E(r) 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

La ddp tra le armature e'

$$\Delta V = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(r) \cdot \vec{dr} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

La capacita' del condensatore quindi e'

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\lambda h}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} h$$

In questo caso la capacita' e' grande se la differenza tra i due raggi e' molto piccola.

RIEPILOGHIAMO

- Capacita' di un conduttore sferico $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(R)-V(\infty)}$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

- Capacita' di un condensatore piano $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

- condensatore sferico

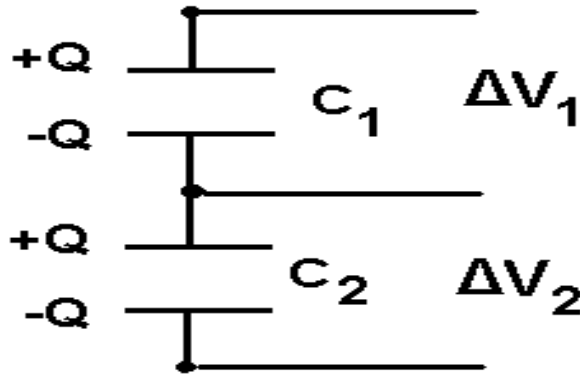
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

- condensatore cilindrico

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Condensatori in serie

I condensatori sono in serie quando **sulle armature c'e' la stessa carica (in valore assoluto)**



supponiamo cioe' di essere in condizione di induzione completa. La differenza di potenziale ai capi della serie e'

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = Q \left(\frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} \right)$$

e quindi

$$\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q}{\Delta V},$$

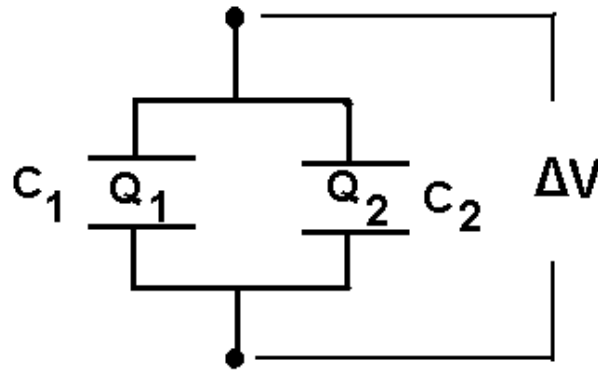
cioe' e' come se avessimo un unico condensatore di capacita'

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

ai cui capi c'e' la stessa ddp che avevamo ai capi della serie, e su cui c'e' la stessa carica Q .

Condensatori in parallelo

I condensatori sono in parallelo quando **ai loro capi c'e' la stessa differenza di potenziale**



Notare che se $C_1 \neq C_2$ allora $Q_1 \neq Q_2$. Si ha che

$$\begin{cases} \Delta V & C_1 = Q_1 \\ \Delta V & C_2 = Q_2 \end{cases} \rightarrow Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$$

e infine

$$Q = (C_1 + C_2) \Delta V,$$

cioe' e' come se avessimo un unico condensatore di capacita'

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

ai cui capi c'e' la stessa ddp che avevamo ai capi della serie e su cui c'e' la carica

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Condensatori con dielettrico

Cosa succede se riempiamo lo spazio tra le armature di un condensatore con del materiale isolante, per esempio olio minerale o plastica?

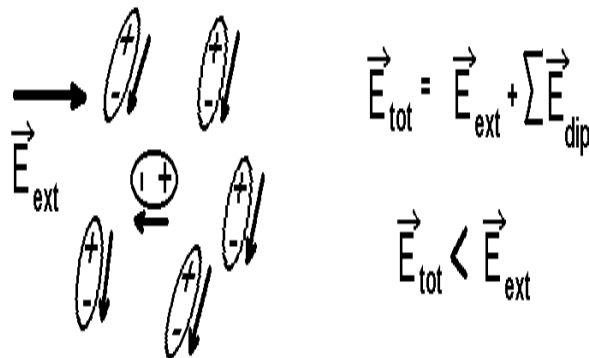
Michael Faraday trovo' che la capacita' aumenta di un fattore ϵ_r , detto **costante dielettrica relativa del materiale rispetto al vuoto**

$$C = \epsilon_r C_{vuoto}$$

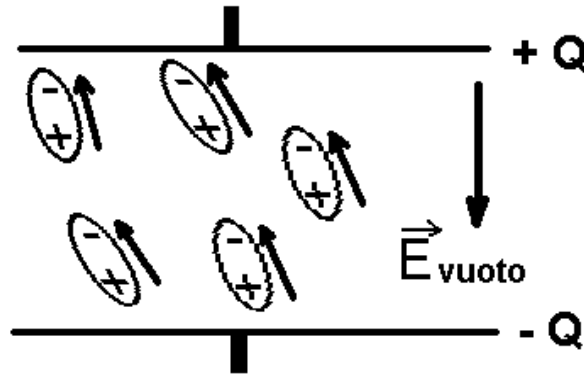
Per esempio

MATERIALE	ϵ_r
vuoto	1
carta	3.5
porcellana	6.5
acqua a 20°C	80.4
ceramica al titanio	130

Il motivo per cui la capacita' aumenta in presenza di un dielettrico e' il seguente. Avevamo gia' visto che quando un dielettrico e' immerso in un campo elettrico esterno i dipoli molecolari gia' presenti, o indotti dal campo, tendono ad allinearsi con il campo esterno in modo tale che il campo di ciascun dipolo abbia verso opposto a quello esterno. Di conseguenza il campo totale (dipoli+ esterno) diminuisce



Quando inseriamo un dielettrico tra le armature



il campo totale all'interno sarà la somma di quello generato dalla carica sulle armature più quello dei dipoli orientati, e per quanto detto prima sarà inferiore a quello nel vuoto

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{E_{vuoto}}{\epsilon_r}$$

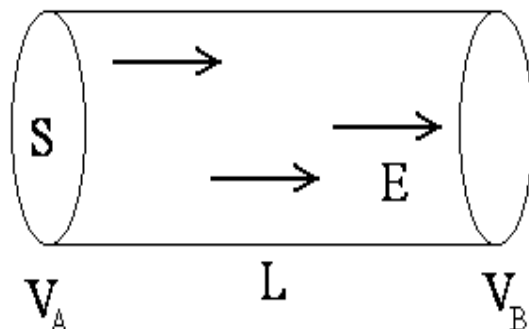
Di conseguenza la ddp tra le armature $\Delta V = E d$ diminuisce

$$\Delta V = \frac{\Delta V_{vuoto}}{\epsilon_r} \rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \epsilon_r C_{vuoto}$$

c.v.d.

Moto di cariche all'interno di un conduttore.

Applichiamo ai capi di un conduttore cilindrico di sezione S una ddp $V_A - V_B$ con $V_A > V_B$. Il campo sarà diretto da punti a potenziale maggiore a punti a potenziale minore (cioè da A a B) e gli elettroni di conduzione si muoveranno da B ad A



Se invece che un conduttore avessimo un tubo in cui c'è una soluzione in cui si trovino ioni positivi, questi si muoverebbero da A a B.

La corrente elettrica è la quantità di carica che passa attraverso la sezione S nell'unità di tempo

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Per convenzione si assume che il verso della corrente sia quello che va dal potenziale maggiore al potenziale minore, anche se sono gli elettroni a muoversi. In generale la corrente può essere dovuta al movimento sia di cariche positive che negative.

Unità di misura della corrente

$$1 \text{ Ampère} = 1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{\text{s}}$$

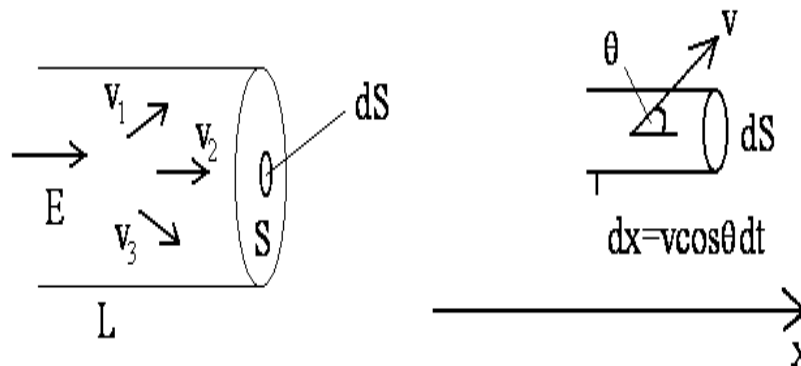
l'Ampère è un'unità fondamentale del sistema SI.

Dimostriamo ora che la corrente e' è data dal flusso del vettore densità di corrente \vec{J} attraverso la sezione del conduttore.

Supponiamo che i portatori di carica siano tutti positivi e che siano \mathcal{N}_+ per m^3

$$\mathcal{N}_+ = \frac{\text{numero portatori di carica}}{\text{volume}}$$

Supponiamo che si muovano con velocità v_+ come indicato in figura



Quanti di questi attraverseranno l'elemento di sezione dS nel tempo dt ?
Tutti quelli che si trovano nel volumetto

$$dV = v_+ \cos \theta \, dt \, dS = \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS \, dt$$

In questo volume ci saranno $d\mathcal{N}_+$ portatori di carica pari a

$$d\mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_+ dV = \mathcal{N}_+ \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS \, dt \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathcal{N}_+}{dt} = \mathcal{N}_+ \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS$$

$\frac{d\mathcal{N}_+}{dt}$ è il numero di portatori di carica che attraversano dS nel tempo dt , quindi il numero totale di portatori di carica che passa attraverso la sezione S nell'unità di tempo è

$$\frac{d\mathcal{N}_+}{dt} = \int_S \mathcal{N}_+ \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS$$

quindi, la carica totale che fluisce attraverso S nell'unità di tempo sarà

$$\frac{dq}{dt} = q_+ \frac{d\mathcal{N}_+}{dt} = \int_S q_+ \mathcal{N}_+ \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS$$

e se ci sono portatori di entrambi i segni

$$\frac{dq}{dt} = \int_S q_+ \mathcal{N}_+ \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS + \int_S q_- \mathcal{N}_- \vec{v}_- \cdot \hat{n} dS$$

Riscrivo

$$\frac{dq}{dt} = \int_S q_+ \mathcal{N}_+ \vec{v}_+ \cdot \hat{n} dS + \int_S q_- \mathcal{N}_- \vec{v}_- \cdot \hat{n} dS$$

Se ora definiamo il vettore **densita' di corrente** \vec{J}

$$\vec{J} = \mathcal{N}_+ q_+ \vec{v}_+ + \mathcal{N}_- q_- \vec{v}_-$$

che rappresenta la carica che passa nell'unita' di tempo e per unita' di superficie, la corrente

$$i = \frac{dq}{dt}$$

si puo' esprimere come il flusso del vettore \vec{J} attraverso una superficie S

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS$$

e se \vec{J} e \hat{n} sono paralleli e se \vec{J} e' costante sulla sezione S

$$i = JS$$

ATTENZIONE: $q_+ \vec{v}_+$ e $q_- \vec{v}_-$ hanno lo stesso segno, e quindi contribuiscono alla corrente in maniera uguale.

ATTENZIONE: la corrente i e' una quantita' scalare.

Velocita' di deriva degli elettroni

In un conduttore gli elettroni di conduzione hanno velocita' distribuite in modo casuale e molto elevate, dell'ordine di $\sim 10^5 - 10^6 \text{ m/s}$. La corrente pero' viaggia a velocita' molto piu' bassa, detta velocita' di deriva, dell'ordine di $\sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ m/s}$. In pratica questa e' la velocita' del moto "ordinato" degli elettroni nella direzione del campo, che si sovrappone al moto disordinato.

Calcoliamo v_d . Sappiamo che in un tratto di filo conduttore di lunghezza dl e volume $dV = S dl$, e' contenuta una certa carica dq , e, se $n e$ e' la carica per unita' di volume

$$n_e = \frac{dq}{dV} \quad \rightarrow \quad dq = n S dl e$$

dove S e' la sezione del filo. Notare che ora non ci interessano i segni. Se tutte le cariche hanno velocita'

$$v_d = \frac{dl}{dt} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{dl}{v_d}$$

la corrente i si puo' scrivere cosi'

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{n S dl e}{\frac{dl}{v_d}} = n S e v_d$$

e quindi la velocita' di deriva e'

$$v_d = \frac{i}{n S e}$$

ed essendo $i = JS$

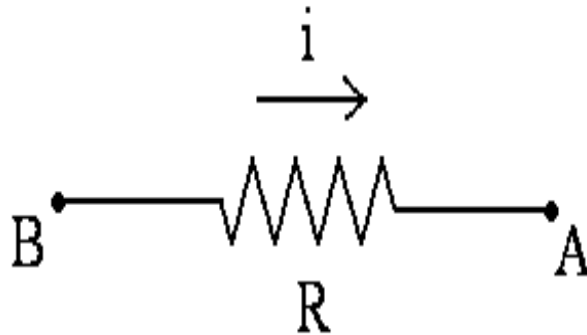
$$v_d = \frac{J}{n e}$$

LEGGE di OHM

Dato un conduttore, se vogliamo che ci passi corrente dobbiamo applicare una differenza di potenziale. Si trova che per una classe di conduttori, detti conduttori Ohmici, vale la seguente relazione

$$V_A - V_B = i R$$

dove si assume che A sia a potenziale maggiore di B e, secondo la convenzione, la corrente scorre da A a B come indicato in figura



La costante di proporzionalità R è detta **resistenza** ed è data da

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove ρ è detta resistività e dipende dal materiale, e l e S sono rispettivamente la lunghezza e la sezione del conduttore.

La resistività è definita come il campo elettrico applicato diviso la densità di corrente prodotta

$$\rho = \frac{E}{J}$$

La resistività cresce con la temperatura

Per i metalli la dipendenza è circa lineare su un ampio intervallo di temperatura. Unità di misura della resistenza

$$1 \text{ Ohm} = 1 \Omega = \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ Ampère}}$$

Interpretazione Microscopica della Legge di OHM

Per dare un'interpretazione microscopica della legge di Ohm, utilizziamo il modello a **elettroni liberi**, assumiamo cioè che nel conduttore gli elettroni si comportino come un gas di particelle libere che interagiscono tra loro tramite gli urti.

Sappiamo che le velocità tipiche degli elettroni sono dell'ordine di $\sim 10^5 - 10^6$ m/s.

Se applichiamo un campo esterno, gli elettroni subiranno un'accelerazione nella direzione del campo (e in verso opposto)

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{E e}{m_e}$$

e quindi si produrrà un moto di insieme nella direzione del campo che si somma al moto libero e disordinato. Però, ciascun elettrone subisce continuamente degli urti e, a ogni urto, cambia direzione perdendo memoria della velocità che aveva acquisito per effetto del campo esterno.

Nel tempo medio che intercorre tra due urti, τ , la velocità acquistata dall'elettrone per effetto del campo esterno sarà

$$v_d = a\tau = \frac{E e \tau}{m_e}$$

dove v_d è la velocità di deriva. Ricordando che v_d si può esprimere in funzione della densità di corrente J $v_d = \frac{J}{n e}$ si trova che

$$\frac{J}{n e} = \frac{E e \tau}{m_e} \rightarrow E = \left(\frac{m_e}{e^2 n \tau} J \right)$$

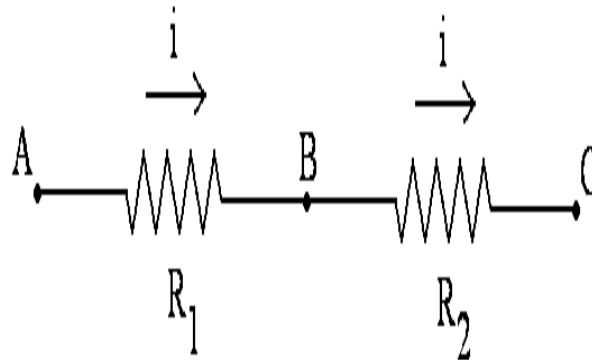
e ricordando che la resistività è definita come $\rho = \frac{E}{J}$ si ha infine

$$\rho = \frac{m_e}{e^2 n \tau}$$

Dato che m_e , n , e sono costanti, si vede che ρ è costante, e cioè il conduttore obbedisce alla legge di Ohm, se il tempo medio tra due urti può essere considerato costante indipendentemente dal campo applicato.

Resistenze in serie

Le resistenze sono in serie quando in esse **passa la stessa corrente**



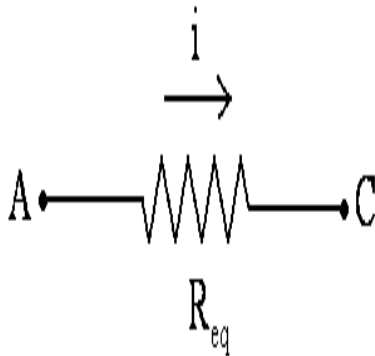
$$V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = i R_1 + i R_2 = i(R_1 + R_2)$$

e quindi

$$V_A - V_C = i(R_1 + R_2)$$

(ricordare che per convenzione la corrente elettrica va dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, indipendentemente dal fatto che siano gli elettroni a muoversi)

Quindi e' come se avessimo un'unica resistenza pari a

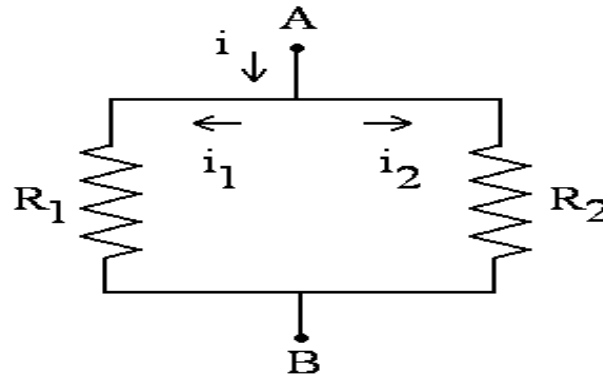


$$R_{eq} = (R_1 + R_2)$$

in cui passa la stessa corrente i e ai cui capi c'e' la ddp. che c'e' ai capi della serie.

Resistenze in parallelo

Le resistenze sono in parallelo quando ai loro capi c'è **la stessa differenza di potenziale**



La corrente i entra nella maglia e si biforca in i_1 e i_2 tali che

$$i = i_1 + i_2$$

Applicando la legge di Ohm a entrambi i rami della maglia si ha

$$\begin{cases} V_A - V_B = i_1 R_1 \\ V_A - V_B = i_2 R_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_1} \\ i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} \end{cases}$$

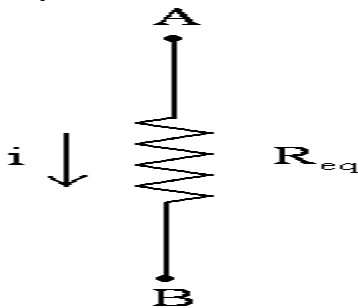
da cui

$$i = i_1 + i_2 = (V_A - V_B) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

e infine

$$(V_A - V_B) = i \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

Quindi è come se avessimo un'unica resistenza pari a



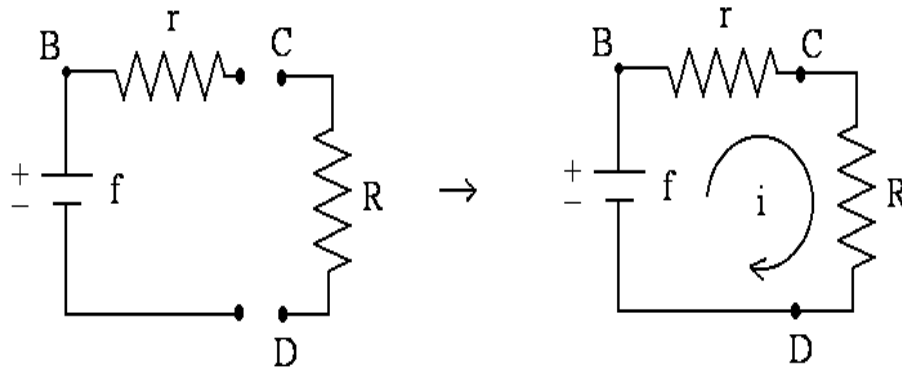
$$R_{eq} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

in cui passa la stessa corrente i che entra nel parallelo, e ai cui capi c'è la ddp. che c'è ai capi del parallelo.

Generatori di Tensione

Un generatore di tensione e' un dispositivo che produce ai suoi estremi una differenza di potenziale. Ad esempio pile e accumulatori convertono energia chimica in energia elettrica, una dinamo trasforma energia di rotazione in energia elettrica etc.

Un generatore si schematizza con una **forza elettromotrice**, cioe' la ddp che si misura quando il circuito e' aperto f , e una resistenza interna r . Vediamo cosa succede quando attacchiamo un generatore di tensione ai capi di una resistenza R :



La somma delle differenze di potenziale presenti ai capi dei rami che costituiscono una maglia deve essere zero

$$(V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B) = 0$$

Per la legge di Ohm

$(V_B - V_C) = ir$ e $(V_C - V_D) = iR$, quindi l'eq. precedente diventa

$$ir + iR - f = 0 \quad \rightarrow \quad f = i(R + r) \quad \text{e} \quad i = \frac{f}{r + R}$$

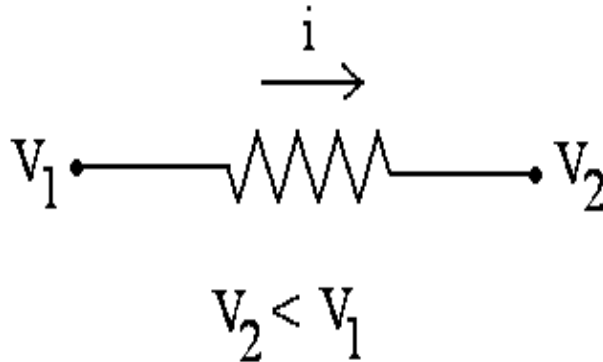
Ai morsetti del generatore a circuito chiuso ci sara' una ddp pari a

$$V_C - V_D = -(V_B - V_C) - (V_D - V_B) \quad \rightarrow \quad V_C - V_D = f - ir$$

quindi la ddp che si misura a circuito chiuso e' minore di quella misurata a circuito aperto. Si dice dunque che c'e' una **caduta di potenziale** sulla resistenza interna del generatore.

EFFETTO JOULE

Quando le cariche si muovono in un campo elettrico questo compie lavoro. Sia dL il lavoro necessario per portare la carica dq attraverso un conduttore di resistenza R , ai cui capi sia applicata la ddp. $V_1 - V_2$



$$dL = dq (V_1 - V_2) = i dt (V_1 - V_2) \quad \rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = i (V_1 - V_2)$$

Dato che, per la legge di Ohm, $V_1 - V_2 = i R$

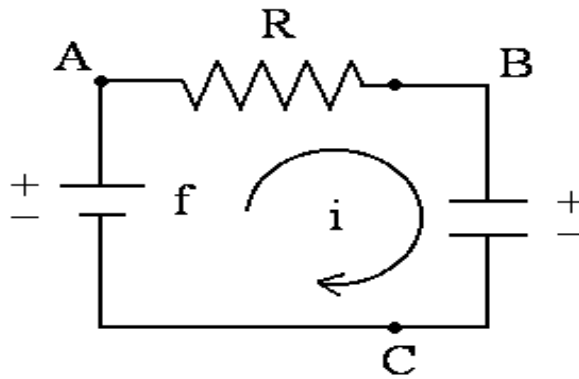
$$\frac{dL}{dt} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} = i^2 R$$

Il lavoro viene fatto dal generatore e va dissipato nella resistenza a causa dei continui urti cui sono sottoposti gli elettroni nel loro moto attraverso il conduttore.

$\frac{dL}{dt}$ e' dunque la **potenza dissipata** per effetto Joule (misurata in Watts). Per esempio, il ferro da stiro funziona per effetto Joule: la potenza dissipata si trasforma in calore. Le lampadine si riscaldano per lo stesso motivo.

Carica di un condensatore

Per caricare un condensatore lo connettiamo a un generatore di forza elettromotrice f e resistenza R



$$\begin{aligned}(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_A) &= 0 \\ \Downarrow \\ iR + \frac{Q}{C} - f &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = f\end{aligned}$$

Separiamo le variabili

$$(RC)\frac{dQ}{dt} = fC - Q \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{fC - Q} = \frac{dt}{RC}$$

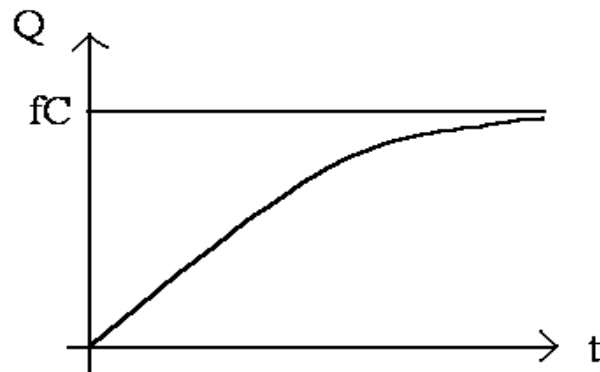
Definiamo la costante di tempo di carica di un condensatore

$$\tau = RC$$

e integriamo

$$\begin{aligned}\int_0^Q \frac{dQ}{fC - Q} &= \int_0^t \frac{dt}{\tau} \quad \rightarrow \quad -\ln(fC - Q) \Big|_0^Q = \frac{t}{\tau} \\ \Downarrow \\ \ln \frac{(fC - Q)}{fC} &= -\frac{t}{\tau} \quad \rightarrow \quad fC - Q = fC e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \Downarrow \\ Q &= fC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\end{aligned}$$

$$Q = fC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Come si vede la carica tende asintoticamente al valore $Q = fC$, cioè la carica che ci sarebbe se la forza elettromotrice f fosse applicata direttamente ai capi del condensatore.

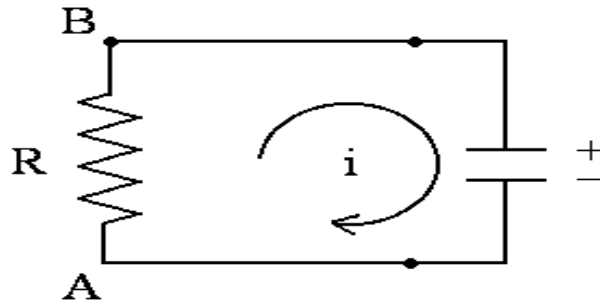
Notare inoltre che la costante τ fornisce una misura di quanto è rapido il processo di carica. Infatti il termine $e^{-\frac{t}{\tau}}$ ha il seguente andamento

$t =$	$e^{-\frac{t}{\tau}} =$	
τ	$e^{-1} = 0.368$	$\rightarrow Q = 0.632(fC)$
2τ	$e^{-2} = 0.135$	$\rightarrow Q = 0.865(fC)$
3τ	$e^{-3} = 0.05$	$\rightarrow Q = 0.95(fC)$
5τ	$e^{-5} = 7 \cdot 10^{-3}$	$\rightarrow Q = 0.993(fC)$
10τ	$e^{-10} = 4.5 \cdot 10^{-5}$	$\rightarrow Q = 0.999955(fC)$

Questo significa che dopo un tempo $t = 10\tau$ possiamo dire che praticamente la carica ha raggiunto il valore limite.

Scarica di un condensatore

Per scaricare un condensatore applichiamo ai suoi capi una resistenza R



$$(V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0 \quad \rightarrow \quad iR + \frac{Q}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0$$

e infine

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\tau}$$

dove abbiamo di nuovo definito la costante di tempo (carica e scarica avvengono con lo stesso tempo caratteristico)

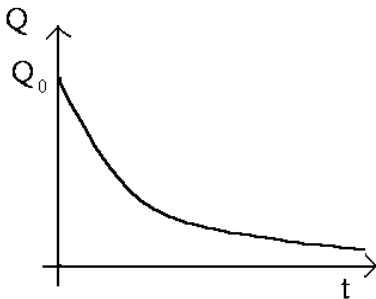
$$\tau = RC$$

Separiamo le variabili e integriamo

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{\tau} \quad \rightarrow \quad \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

e quindi

$$\ln \frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{t}{\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{Q(t)}{Q_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \rightarrow \quad Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



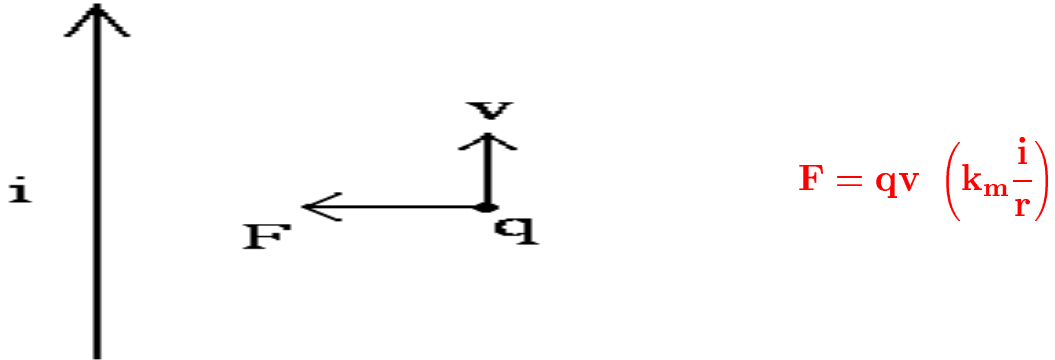
La ddp ai capi del condensatore varia nel tempo con la seguente legge

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

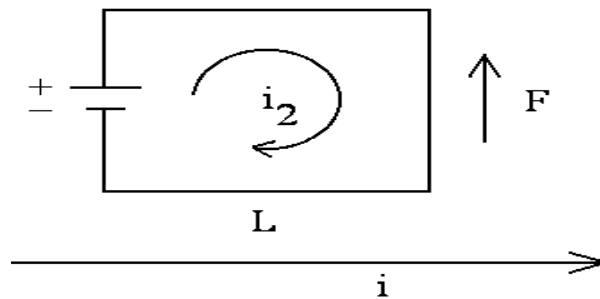
quindi sia la carica che la ddp tendono a zero con legge esponenziale e con tempo caratteristico dato da τ

Forza magnetica

Supponiamo di avere un filo rettilineo percorso da una corrente i . Se poniamo una carica q a distanza r dal filo e ferma, non succede niente. Se invece ha velocità \vec{v} , per esempio parallela al filo, si osserva che la carica viene attratta se \vec{v} è concorde con il verso della corrente, respinta se è discorde, e in generale



Supponiamo invece di porre vicino al filo percorso dalla corrente i un circuito di prova in cui passa una corrente i_1 , in modo tale che un tratto lungo L di questo sia parallelo al filo



in questo caso si trova che i due tratti di filo affacciati si attraggono o respingono a seconda che le correnti fluiscano nello stesso verso o inverso opposto, e si misura

$$F = i_2 L \left(k_m \frac{i}{r} \right)$$

La costante k_m ha il seguente valore

$$k_m = k_0 k_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \mu_r \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/A} \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \end{cases}$$

e μ_0 viene detta **permeabilità magnetica del vuoto**. Nel vuoto $k_r = \mu_r = 1$.

NOTARE CHE:

- L'unità di misura della corrente, l'Ampère, viene definita così:
l'Ampère è la corrente che attira o respinge con la forza di $k_0 = 2 \cdot 10^{-7} N$ una corrente uguale, che scorra parallelamente per un tratto di un metro, e che sia posta a distanza di un metro.
- L'interazione elettromagnetica **non** è indipendente da quella elettrostatica. Infatti si trova che

$$\frac{k_m}{k_e} = \frac{2}{c^2} \quad (5)$$

dove $c = 300.000 \text{ km/s}$ è la velocità della luce nel vuoto, e sostituendo nella (5) le espressioni di k_m e k_e in funzione della permeabilità magnetica e della costante dielettrica

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{2}{c^2}$$

si trova che

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

Riscriviamo le espressioni della forza filo-carica e filo-filo

$$\text{filo-carica} \quad F = qv \left(k_m \frac{i}{r} \right)$$

$$\text{filo-filo} \quad F = i_1 L \left(k_m \frac{i}{r} \right)$$

dove $k_m = \frac{\mu_0}{2\pi}$. Possiamo isolare in queste espressioni una parte che dipende dalla carica (qv) o dal circuito di prova ($i_1 L$) e una parte che invece dipende dal filo in cui passa la corrente i ($k_m \frac{i}{r}$). Allora definiamo un vettore \vec{B} che chiamiamo campo magnetico generato dal filo percorso da corrente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{l} \wedge \hat{r}$$

dove r e' la distanza dal filo, \hat{l} e' il versore del filo e ha lo stesso verso della corrente, e \hat{r} e' il versore che individua la direzione radiale rispetto al filo. In pratica \vec{B} e' tangente alle circonferenze perpendicolari al filo, e che hanno centro sul filo. Il modulo di \vec{B} e'

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Questa e' la legge di **BIOT-SAVART**.

Allora la forza con cui la carica interagisce con il campo magnetico puo' essere scritta come

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

che rende conto sia del caso in cui la particella abbia velocita' parallela al filo che del caso generale di velocita' arbitraria.

Questa e' l'espressione della **FORZA DI LORENTZ**.

Nel caso del filo invece

$$\vec{F} = i_2 \vec{l} \wedge \vec{B}$$

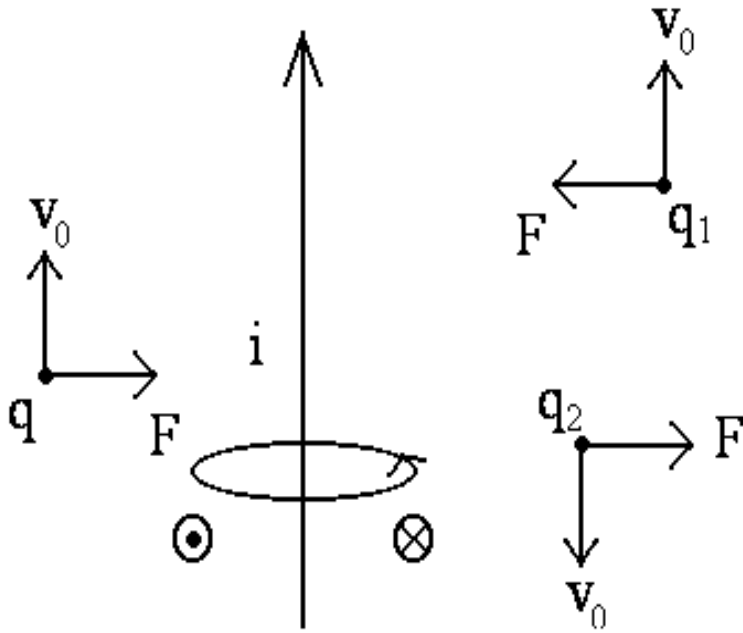
(notare che $[i_2 l]$ e $[qv]$ hanno le stesse dimensioni).

Vediamo i vari casi

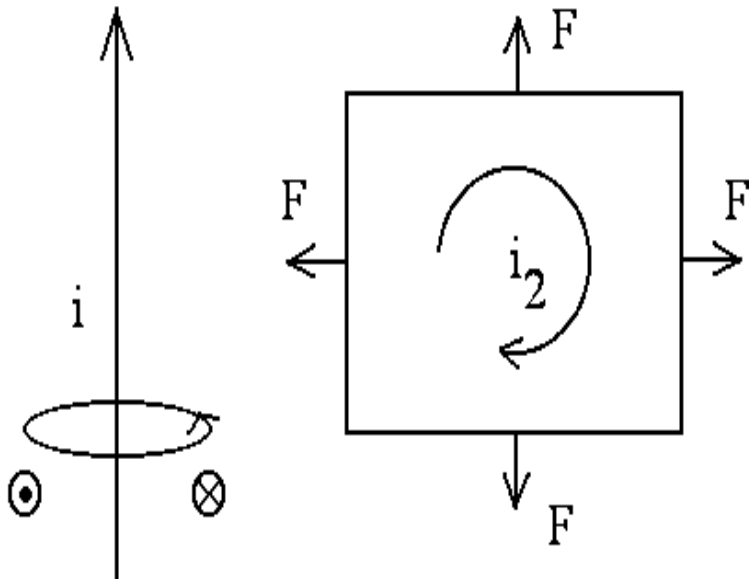
convenzione: cerchietto+puntino= campo uscente,
cerchietto+crocetta= campo entrante.

Il campo magnetico del filo e'

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{l} \wedge \hat{r}$$



$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



$$\vec{F} = i_2 \vec{l} \wedge \vec{B}$$

NOTARE CHE

- Il campo magnetico viene generato ogni volta che ci sono cariche in moto
- Dalla legge di Biot-Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{l} \wedge \hat{r}$$

Deduciamo che le linee di forza del campo magnetico generato da un filo percorso da corrente sono chiuse. Questa e' una proprieta' generale, che deriva dal fatto che non esistono cariche magnetiche isolate, o **monopoli magnetici**.

- L' unita' di misura del campo magnetico e' il **TESLA**:

$$1 \text{ tesla} = 1 T = \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}(\text{metro}/\text{secondo})}$$

- dall'espressione della forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

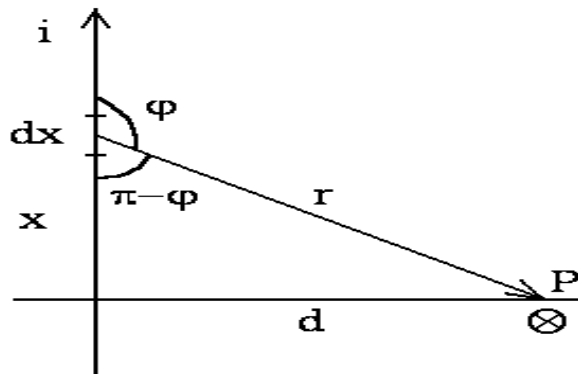
vediamo che essa e' **sempre perpendicolare** alla velocita' della carica, quindi al suo spostamento. Di conseguenza il lavoro fatto dalla forza di Lorentz e' sempre nullo e, dal teorema dell'energia cinetica, segue che l'energia cinetica della particella rimane immutata e cosi' pure il modulo della sua velocita'. Quindi l'effetto della forza di Lorentz e' quello di far variare la **direzione** del moto della particella.

Come calcolare \vec{B} generato da un circuito di forma qualsiasi?

Dato un trattino di filo di lunghezza dl e percorso da corrente i , esso genera un campo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} d\vec{l} \wedge \hat{r}$$

ATTENZIONE: \hat{r} va da $d\vec{l}$ al punto in cui si vuole calcolare il campo. Applichiamo la formula di Laplace per ricavare la legge di Biot-Savart



Consideriamo il trattino di filo $d\vec{x}$ che è percorso da corrente i . Questo genererà in P un campo perpendicolare al piano del foglio e entrante pari a

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} dx \sin \varphi$$

Inoltre si ha che

$$d = r \sin(\pi - \varphi) = r \sin \varphi \quad \text{e} \quad r = \sqrt{x^2 + d^2}$$

per cui

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d dx}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} dx$$

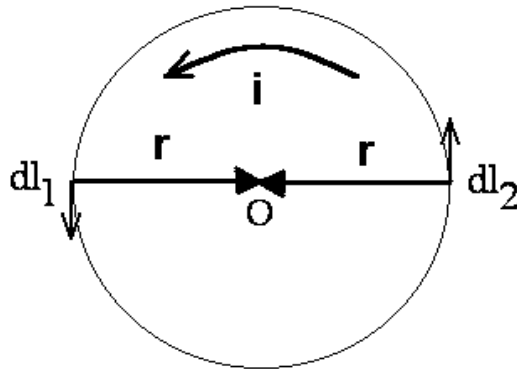
Tutti i trattini di filo $d\vec{l}$ daranno lo stesso contributo, quindi

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d}{d^2} \left[\frac{1}{d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{d}$$

che coincide con quello dato dalla legge di Biot-Savart

Calcolo di \vec{B} al centro di una spira di raggio r percorsa da corrente

Ogni elemento di filo $d\vec{l}$ genererà in O un campo con le stesse caratteristiche. Per es. dati due tratti di filo simmetrici come indicato in figura



essi genereranno in O rispettivamente

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\vec{l}_1 \wedge \hat{r} \quad \perp \quad \text{al foglio e uscente}$$

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\vec{l}_2 \wedge \hat{r} \quad \perp \quad \text{al foglio e uscente}$$

e

$$dB_1 = dB_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} dl,$$

quindi

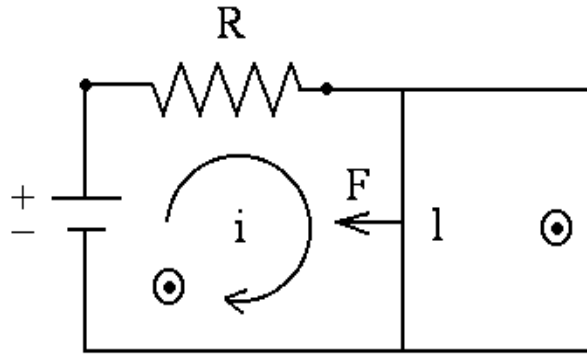
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} 2\pi r = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

Infine

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

Forze su fili percorsi da corrente: esempi

Supponiamo di avere un circuito fatto come in figura

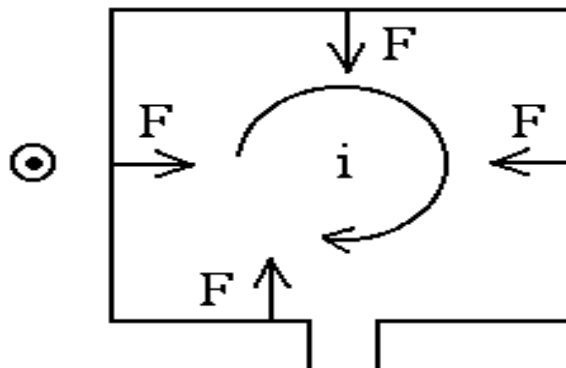


in cui il tratto l sia libero di scorrere senza attrito nella guida orizzontale. Sia \vec{B} un campo magnetico esterno perpendicolare al foglio e uscente (convenzione: cerchietto+puntino= uscente, cerchietto+crocetta=entrante) Se facciamo passare nel circuito una corrente i nel verso indicato in figura, sul filo agira' una forza

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$$

diretta come indicato in figura. Se la corrente circola nel verso opposto, ovviamente la forza cambia verso.

Supponiamo di avere una spira quadrata in cui circola una corrente i come in figura

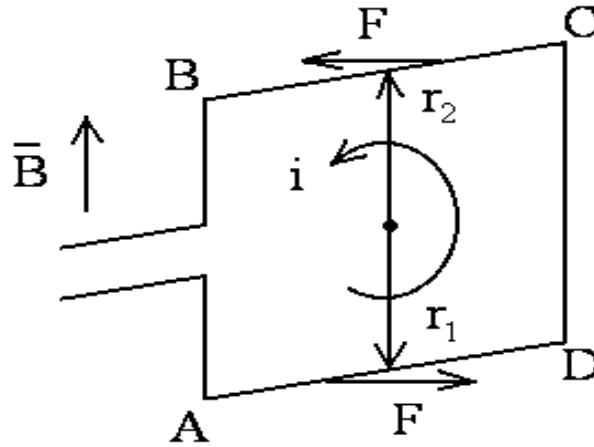


e sia \vec{B} un campo magnetico esterno, perpendicolare al foglio e uscente. Sui vari tratti del filo agiranno le forze indicate in figura che tendono a deformare la spira, ciascuna avente modulo

$$F = ilB$$

Spira percorsa da corrente in un campo magnetico: continua

Supponiamo ora che la spira non sia perpendicolare al campo, ma che questo, a un certo istante iniziale sia per es. diretto da A a B come in figura



Poiche'

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$$

all'istante iniziale sui tratti AB e CD non agira' nessuna forza perche' \vec{l} e \vec{B} sono paralleli, invece su BC e DA agira' una coppia di forze perpendicolari ai rispettivi lati e che tenderanno a far ruotare la spira. Il momento della coppia, calcolato rispetto al centro della spira sara'

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

che, essendo $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ e $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, avranno stesso modulo e stessa direzione

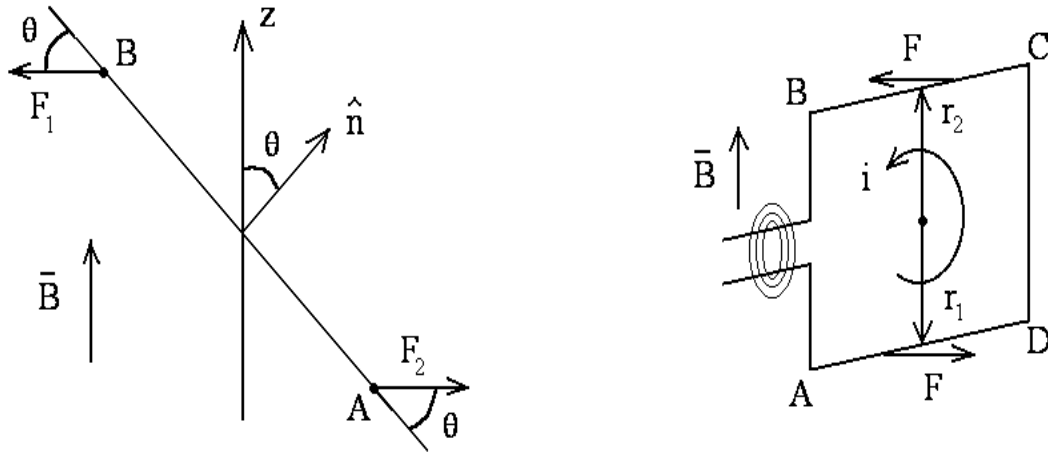
$$\tau = r_1 F_1 + r_2 F_2 = (r_1 + r_2) F = l F$$

quindi, essendo $r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$, e $F_1 = F_2 = F$, il momento torcente risultante si puo' scrivere come

$$\vec{\tau} = \vec{l} \times \vec{F}$$

La spira dunque ruota.

A un certo istante la spira formerà un angolo θ con il campo \vec{B} e la situazione sarà la seguente



dove abbiamo disegnato la spira di taglio. Notare che la corrente che percorre il tratto CB esce da B verso fuori perpendicolarmente al foglio, mentre quella che percorre il tratto DA entra da A verso l'interno e perpendicolarmente al foglio, quindi poichè \vec{B} è diretto lungo l'asse z indicato in figura, esso formerà un angolo di 90° con la direzione della corrente, e le forze saranno dirette come in figura.

Notare che la forza forma un angolo θ con la direzione del lato AB. Calcoliamo il momento risultante delle forze agenti sulla spira

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

dove $\vec{r}_1 = \vec{OB}$ e $\vec{r}_2 = \vec{OA}$; poichè ora \vec{r}_1 e \vec{F}_1 formano un angolo θ e così pure \vec{r}_2 e \vec{F}_2 , e poichè $r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$ si ha che

$$\tau = 2 \frac{l}{2} F \sin \theta = i l^2 B \sin \theta$$

Notare che $A = l^2$ è l'area della spira e θ è anche l'angolo che il versore normale alla spira \hat{n} forma con la direzione di \vec{B} .

Definiamo un vettore che chiameremo

momento magnetico della spira

che ha per modulo il prodotto della corrente per l'area della spira, e per direzione e verso quello di \hat{n} (\hat{n} e' tale che vede la corrente ruotare in senso antiorario)

$$\vec{m} = i A \hat{n}$$

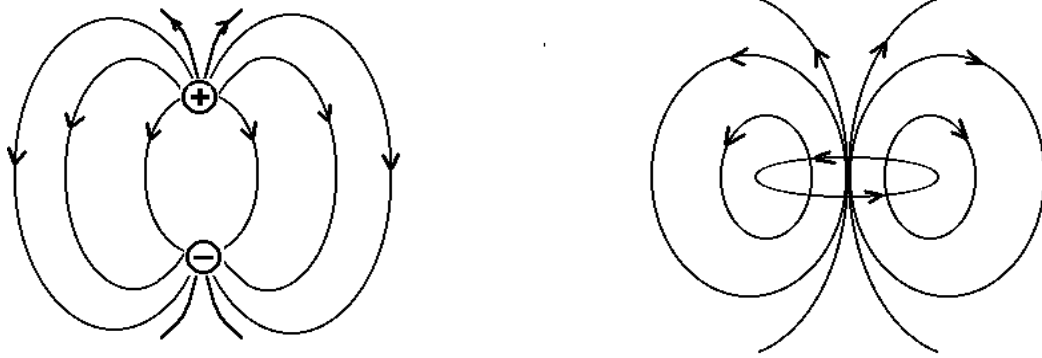
il momento torcente agente sulla spira si potra' infine scrivere come segue

$$\tau = i A B \sin \theta \quad \rightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

(notare l'analogia con il dipolo elettrico in un campo elettrico esterno!)

ATTENZIONE: la definizione del momento magnetico vale anche se la spira e' circolare, e cosi' pure l'equazione $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$.

Confrontiamo per esempio le linee di forza di un dipolo elettrico e di un dipolo magnetico



Come si vede, a parte la zona centrale i due campi si assomigliano molto. Per il dipolo elettrico abbiamo che

$$\vec{p} = q \vec{d} \quad \text{e} \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

per il dipolo magnetico

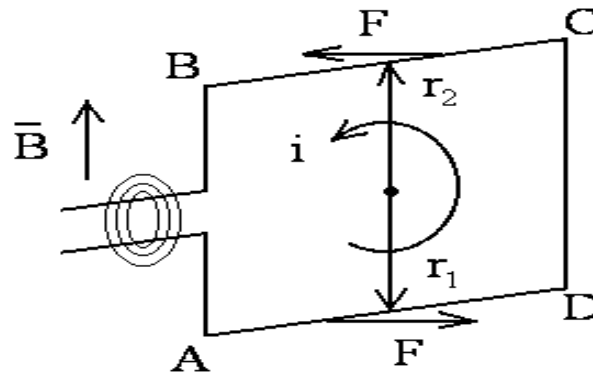
$$\vec{m} = i A \hat{n} \quad \text{e} \quad \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Enunciamo il teorema di equivalenza di Ampère:

una spira puo' essere considerata un dipolo magnetico $\vec{m} = i A \hat{n}$ che, immerso in un campo magnetico esterno, viene sottoposto a un momento torcente dato da $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$.

Amperometro

L'amperometro è un dispositivo per misurare la corrente che si può così schematizzare: è una spira immersa in un campo magnetico \vec{B} simile a quella appena discussa, con la differenza che è trattenuta da una molla a spirale disposta come indicato in figura



La molla si oppone alla rotazione della spira esercitando un momento torcente uguale e opposto a quello esercitato dal campo magnetico. Se θ è l'angolo di cui ruota la spira,

$$\tau_{molla} = -k\theta$$

Essendo

$$\tau_{mag} = i A B \sin \theta$$

segue che all'equilibrio

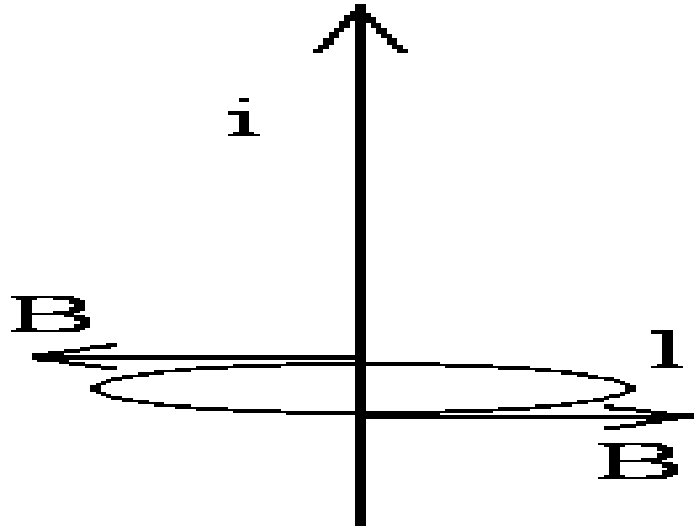
$$\tau_{molla} = \tau_{mag} \rightarrow k\theta = i A B \sin \theta \quad \rightarrow \quad i = \frac{k\theta}{A B \sin \theta} \quad (6)$$

In pratica collegando l'amperometro a un circuito di cui si vuole misurare la corrente, e quindi consentendo alla corrente di passare attraverso di esso, si misura l'angolo θ di cui ruota e, attraverso la (6) si trova il valore di i .

Vediamo se \vec{B} e' conservativo calcolandone la
CIRCUITAZIONE
cioe' l'integrale su un percorso chiuso

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Supponiamo che il campo sia, per esempio, quello generato da un filo percorso da corrente e scegliamo come percorso una linea di forza, cioe' una circonferenza concentrica al filo e perpendicolare ad esso



Il campo B e' tangente alla linea di forza, ed essendo il modulo $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$, sara' costante sulla linea scelta, quindi

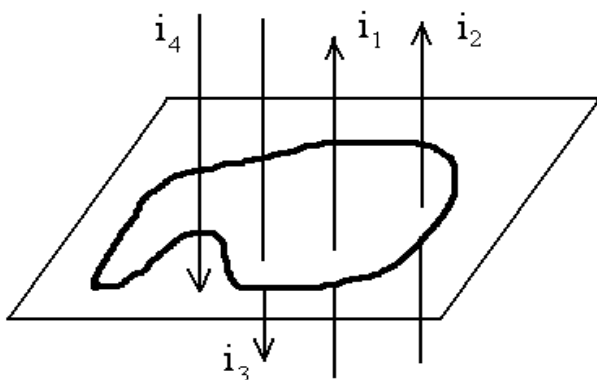
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i$$

quindi il campo magnetico **non e' conservativo!!!**

Formuliamo allora il teorema della circuitazione di Ampère

La circuitazione del campo magnetico su una linea chiusa è pari alla somma delle correnti concatenate alla linea moltiplicata per μ_0

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_k$$



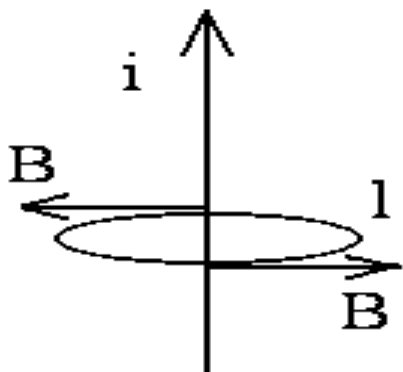
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_1 + i_2 - i_3)$$

Attenzione: le correnti vanno sommate algebricamente nel modo seguente. Fissiamo una normale alla superficie individuata dalla linea chiusa e fissiamo un verso sulla linea chiusa, per esempio antiorario (rispetto alla normale scelta): prenderemo con il segno + le correnti che hanno verso concorde alla normale e con il - le altre.

Si noti che nella figura i_4 non è concatenata alla linea chiusa scelta e non dà contributo alla circuitazione.

Dal punto di vista pratico questo teorema ha funzione analoga a quella del teorema di Gauss in elettrostatica, perché consente di trovare \vec{B} quando si abbiano particolari simmetrie.

Per esempio calcoliamo il campo di un filo infinito. Scegliamo come linea chiusa una circonferenza centrata nel filo e perpendicolare ad essa. Per motivi di simmetria il campo sarà costante su di



essa, e tangente, quindi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r$$

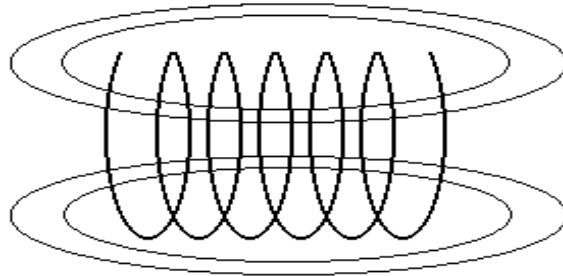
e per il teorema di Ampère

$$B 2\pi r = \mu_0 i \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

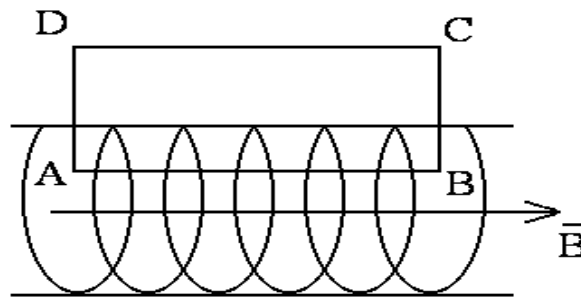
che è quello dato dalla legge di Biot-Savart.

Campo magnetico generato da un solenoide

Un solenoide e' un filo avvolto strettamente a forma di spirale, che puo' essere quindi considerato come una serie di spire sovrapposte. Se il solenoide fosse formato da un numero infinito di spire per motivi di simmetria il campo al suo interno sarebbe costante e diretto parallelamente al solenoide e fuori sarebbe nullo. Nei casi reali invece le linee di forza hanno un andamento di questo tipo (ricordare come sono fatte le linee di forza di una spira)



In pratica il campo all'interno puo' essere considerato costante se la lunghezza del solenoide e' molto maggiore del diametro. Supponiamo di essere in questa situazione e calcoliamo il campo all'interno applicando il teorema di Ampère



Sia

$$n = \frac{\text{numero di spire}}{\text{lunghezza}}$$

il numero di spire per unita' di lunghezza e prendiamo come linea lungo cui calcolare la circuitazione quella indicata in figura

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = l B \end{aligned}$$

Le correnti concatenate alla linea chiusa sono tutte uguali e hanno tutte lo stesso verso; il loro numero è

$$N = n l$$

quindi dal teorema di Ampère

$$l B = \mu_0 n l i \quad \rightarrow \quad B = \mu_0 i n$$

Flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa: Legge di Gauss per il magnetismo

Dal momento che e' sperimentalmente accertato (almeno finora) che cariche magnetiche isolate (monopoli) non esistono, possiamo concludere che le linee di forza del campo magnetico sono chiuse. Di conseguenza, se calcoliamo il flusso di \vec{B} attraverso una superficie chiusa tante linee di forza entreranno quante usciranno e quindi

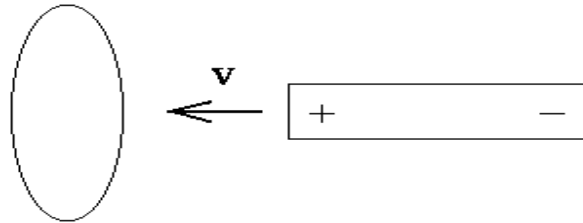
$$\Phi(\vec{B})_{A \text{ chiusa}} = \oint_A \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Ricordiamo che nel caso del campo elettrostatico il fatto che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa fosse pari al numero delle cariche contenute all'interno di essa diviso ϵ_0 , indicava proprio la presenza di sorgenti del campo elettrico.

Il fatto che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa e' zero si esprime anche dicendo che il vettore \vec{B} e' **solenoidale**.

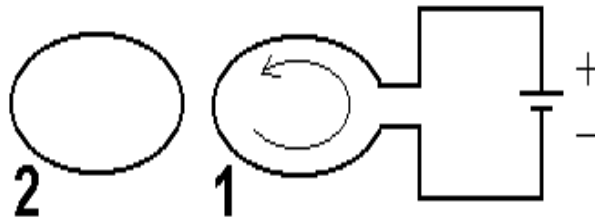
Fenomeni legati a variazioni nel tempo di grandezze elettromagnetiche: alcuni fatti sperimentali

1. Se facciamo variare \vec{B} nelle vicinanze di una spira conduttrice, per esempio avvicinando o allontanando un magnete, si vede che nella spira passa corrente, quindi si genera una forza elettromotrice, quindi un campo elettrico.

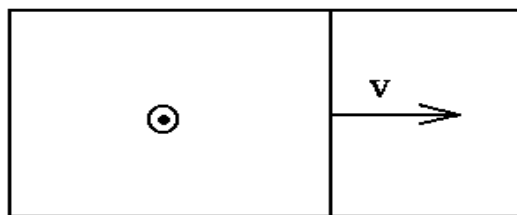


Quindi: campo elettrico e campo magnetico **non sono indipendenti**

2. Si abbiano due spire vicine. In una viene fatta passare una corrente che cresce fino a diventare costante: si osserva che nell'intervallo di tempo in cui la corrente nella spira 1 varia, nella spira 2 si genererà una corrente, che cesserà di scorrere nel momento in cui la corrente in 1 diventa costante.



3. Manteniamo costante il campo magnetico e facciamo variare l'area di una spira, per esempio facendo scorrere un lato lungo delle guide in modo da variare l'area: si vede che nella spira si genera una corrente

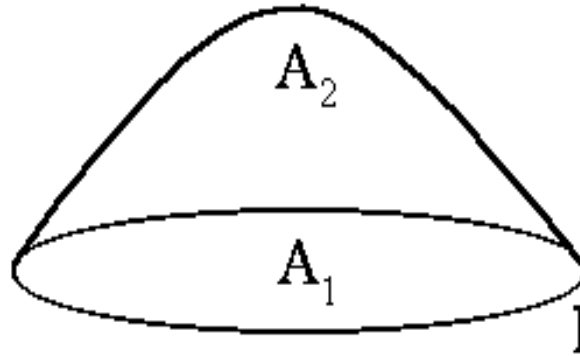


Come spieghiamo questi fenomeni?

Per prima cosa definiamo il

Flusso del campo magnetico concatenato a una linea chiusa

Supponiamo di avere una linea l come indicato in figura, che puo' essere per esempio il bordo di una spira o di un circuito elettrico. Prendiamo una superficie qualsiasi che abbia l come base, per esempio A_1 o A_2 , come indicato in figura



Abbiamo detto che \vec{B} e' un campo solenoidale, cioe'

$$\Phi(\vec{B})_{A \text{ chiusa}} = 0$$

Se ora consideriamo come superficie chiusa quella formata da $A_1 + A_2$, avremo

$$\Phi(\vec{B})_{A \text{ chiusa}} = \oint_{A_1} \vec{B} \cdot \hat{n} dA + \oint_{A_2} \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Questo significa che il flusso che entra attraverso A_1 esce attraverso A_2 (o viceversa), quindi, a parte il segno, possiamo dire che i flussi attraverso le due superfici A_1 e A_2 , che hanno l come base, sono uguali, e dipendono solo dalla linea l scelta. Naturalmente il ragionamento si puo' ripetere per qualsiasi superficie che abbia l come base, quindi definiamo **flusso concatenato** alla linea l il flusso di \vec{B} calcolato attraverso una qualsiasi superficie che abbia l come base.

I fenomeni di generazione di corrente di cui si è parlato prima si spiegano utilizzando la legge di Faraday-Neumann che descrive il fenomeno dell'induzione magnetica.

Data una spira chiusa, se varia il **flusso del campo magnetico concatenato alla spira** in essa passerà una corrente pari a

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad (7)$$

e quindi si genererà una forza elettromotrice indotta

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Se invece la spira è aperta, ai suoi capi si genererà una differenza di potenziale

$$\Delta V = f_{em}$$

Vediamo dunque che ogni volta che varia il flusso di \vec{B} concatenato alla spira (o in generale a un circuito), si genera una corrente indotta.

Perché nella (7) c'è il segno meno ?

Legge di Lenz

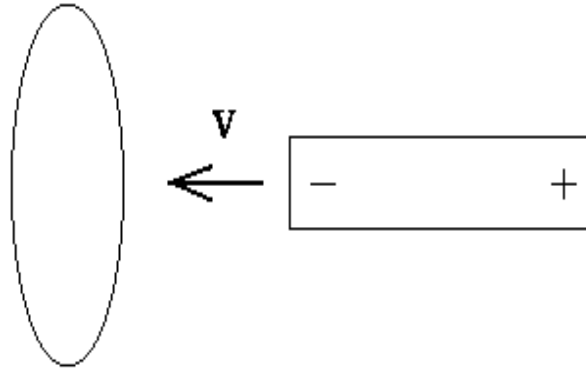
Se nella spira passa una corrente indotta, questa genererà un campo magnetico indotto, che a sua volta genererà un flusso concatenato alla spira: il segno meno indica che le variazioni del flusso concatenato alla spira del campo indotto, devono compensare quelle del campo inducente, in modo tale che

$$\Delta\Phi(\vec{B}_{indotto}) + \Delta\Phi(\vec{B}_{inducente}) = 0$$

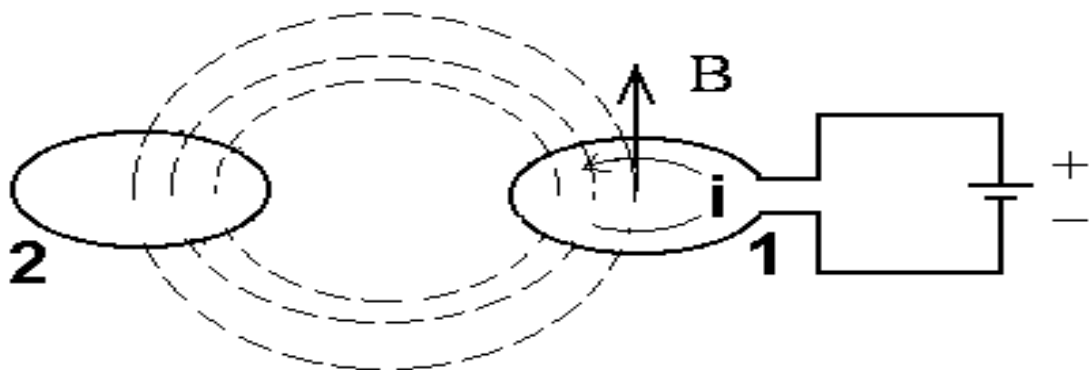
La corrente circola in verso tale che le variazioni di flusso concatenato del campo magnetico indotto compensino quelle del campo magnetico inducente.

Vediamo allora di spiegare i fenomeni precedenti utilizzando la legge di Faraday-Neumann.

1. Avviciniamo o allontaniamo un magnete a una spira chiusa: il flusso cambia perché il campo varia in intensità, quindi si genera una corrente indotta. In questo caso l'energia meccanica necessaria per spostare il magnete viene convertita in energia elettrica e dato che la spira avrà una resistenza, viene poi dissipata per effetto Joule.

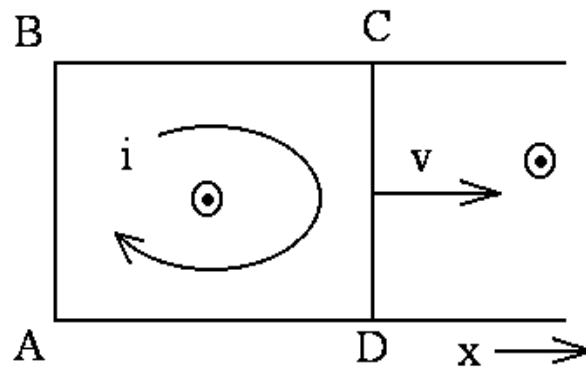


2. Due spire vicine, in una passa una corrente variabile



Siccome la corrente nella spira 1 varia, varia l'intensità del campo che essa genera, e quindi il flusso di questo campo attraverso la spira 2. In questo caso l'energia che alimenta la corrente nella spira 2 proviene dall'energia elettrica che alimenta la spira 1.

3. Spira con area variabile.



Il campo esterno \vec{B} rimane costante, ma il flusso varia perché varia l'area della superficie concatenata alla spira. Se il tratto mobile CD viene fatto muovere per esempio a velocità costante v , se la lunghezza iniziale del lato BC è x_0 , al tempo t sarà $x = x_0 + vt$, quindi

$$\Phi(\vec{B})_A = B A = B l (x_0 + vt) \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = B l v$$

e la corrente indotta avrà modulo

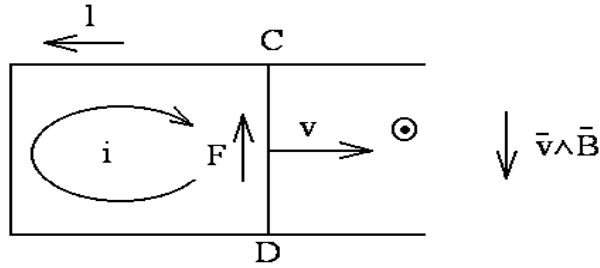
$$i = \frac{B l v}{R}$$

Supponiamo che il campo \vec{B} sia uscente rispetto al foglio. Per compensare la variazione di flusso la corrente deve circolare in senso orario, in modo che $\vec{B}_{indotto}$ abbia verso entrante, e il suo $\frac{d\Phi(\vec{B}_{indotto})}{dt}$ compensi quello del campo \vec{B} .

Chi paga in termini energetici? L'energia meccanica che dobbiamo fornire per far spostare il braccio mobile della spira viene convertita in energia elettrica.

Interpretazione microscopica della legge di Faraday-Neumann

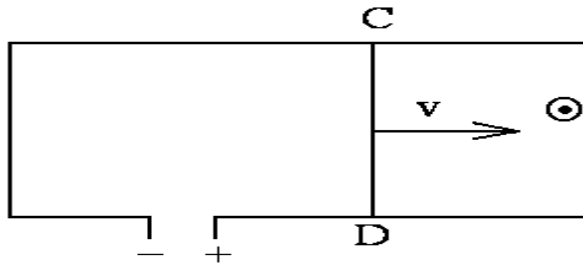
Consideriamo ancora la spira ad area variabile, e consideriamo quello che accade agli elettroni che stanno sul tratto mobile del circuito.



Dato che si muovono tutti con velocità v rivolta verso destra, su di loro agirà la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$v \wedge \vec{B}$ è diretto da C a D, e siccome le cariche sono negative la forza che agisce su di loro sarà diretta da D a C, e quindi la corrente per convenzione andrà in verso opposto. Se la spira è aperta



si avrà un accumulo di cariche negative a un estremo e positive all'altro, come indicato in figura, quindi avremo un campo elettromotore indotto

$$\vec{E}_e = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

e quindi se chiudiamo il circuito ci sarà una forza elettromotrice indotta

$$f_{em} = \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = l v B$$

ATTENZIONE: il campo elettromotore **non è conservativo**: infatti il suo integrale sul circuito chiuso dà la forza elettromotrice, non zero!

Unità di misura del flusso magnetico

Notare che dalla legge di Faraday-Neumann le dimensioni del flusso magnetico sono

$$[\Phi(\vec{B})] = [i R t] = [V t]$$

quindi l'unità di misura sarà

$$\Phi(\vec{B}) \rightarrow \text{Volt} \cdot \text{s} = \text{weber} = \text{Wb}$$