Tecniche di Programmazione Funzionale e Imperativa

Ivano Salvo

Programmazione C: Specifiche Pre, Post-condizioni, invarianti

Corso di Laurea in **Informatica**, III anno

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

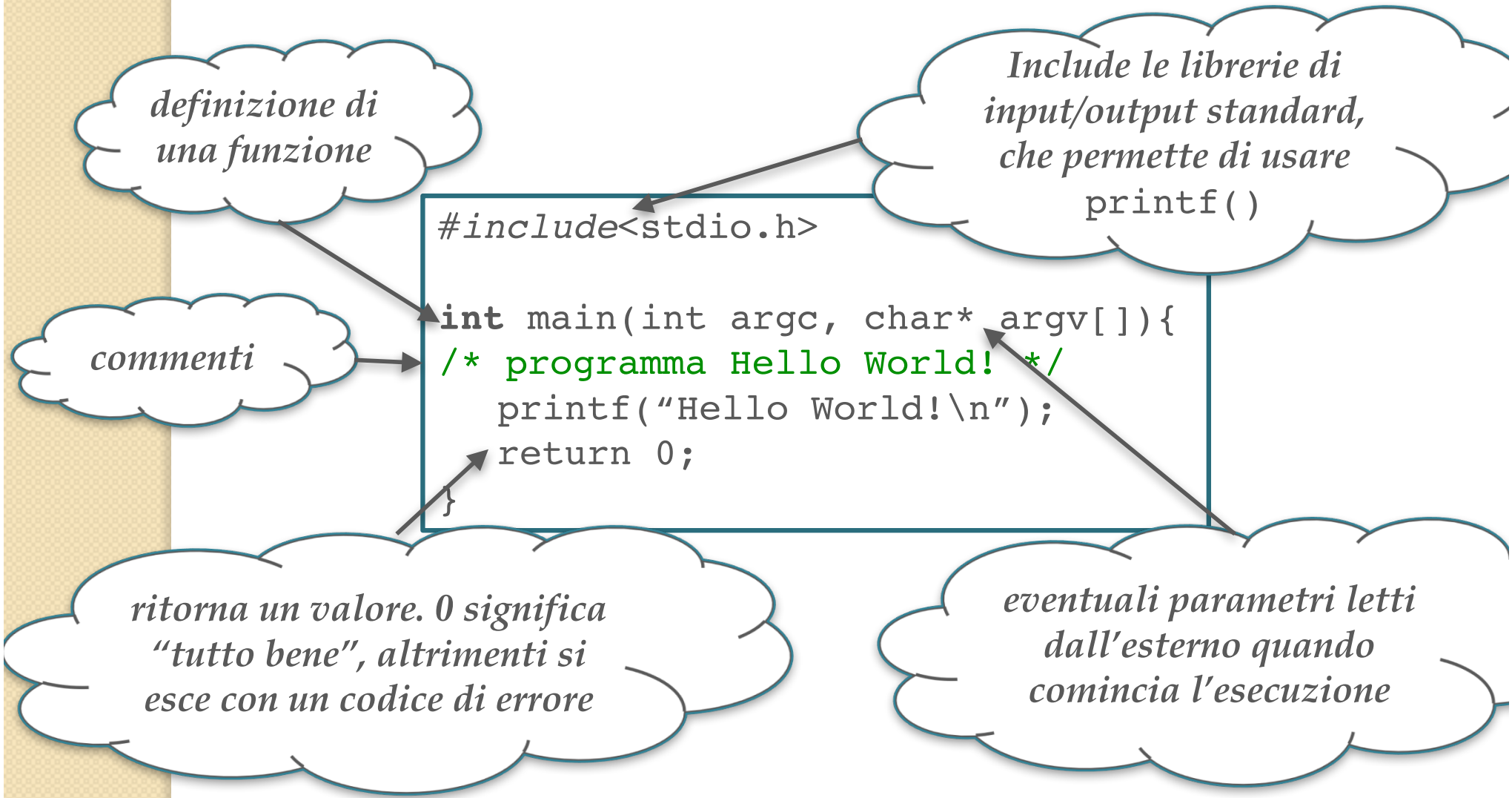
Lezione **19**, 3 maggio 2022

Lezione 19a

Tiny C e Asserzioni Logiche

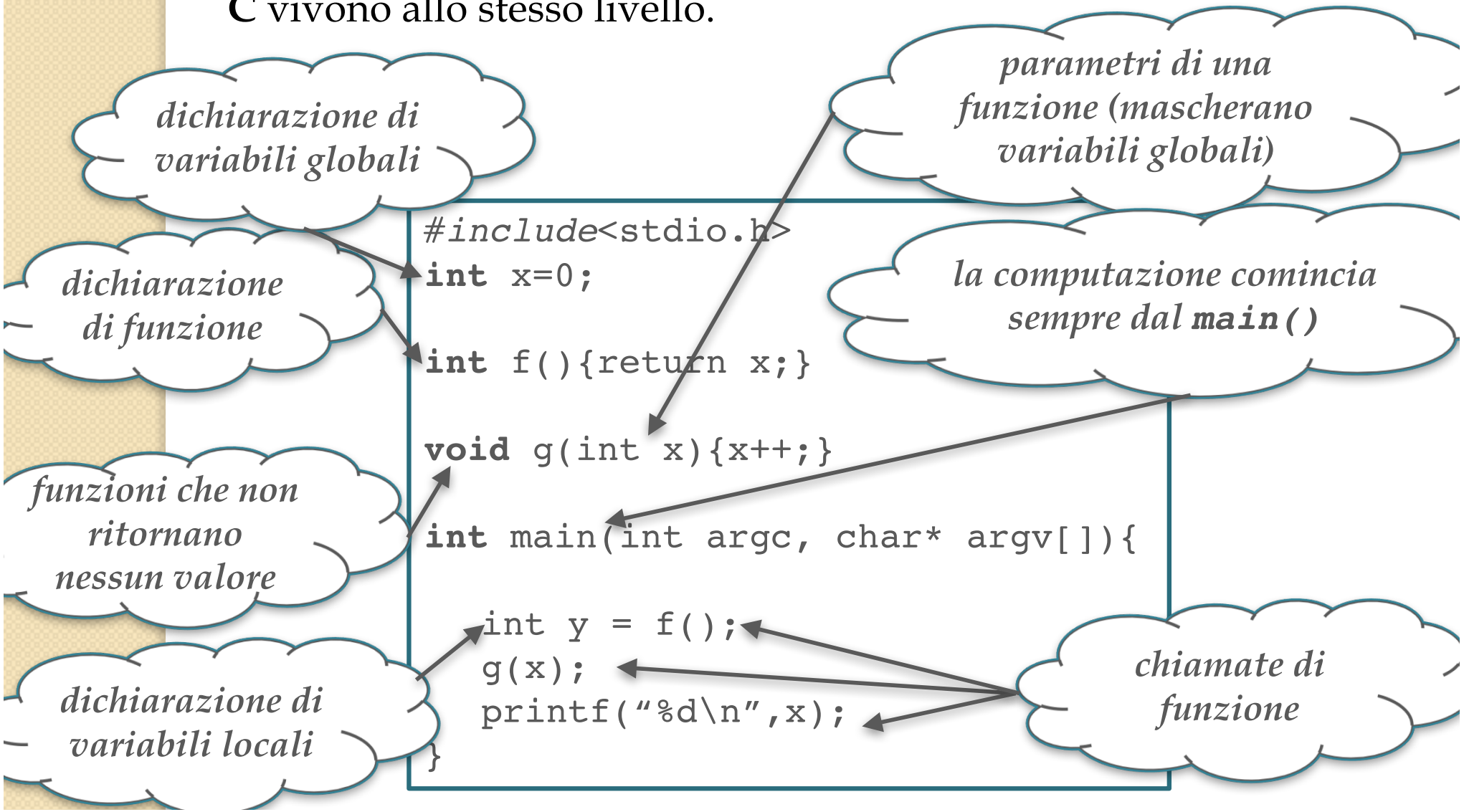
Struttura di un programma C -

Ogni buon corso di **C** comincia con il programma Hello World!



Struttura di un programma C

La computazione comincia sempre da `main()`. Tutte le funzioni **C** vivono allo stesso livello.

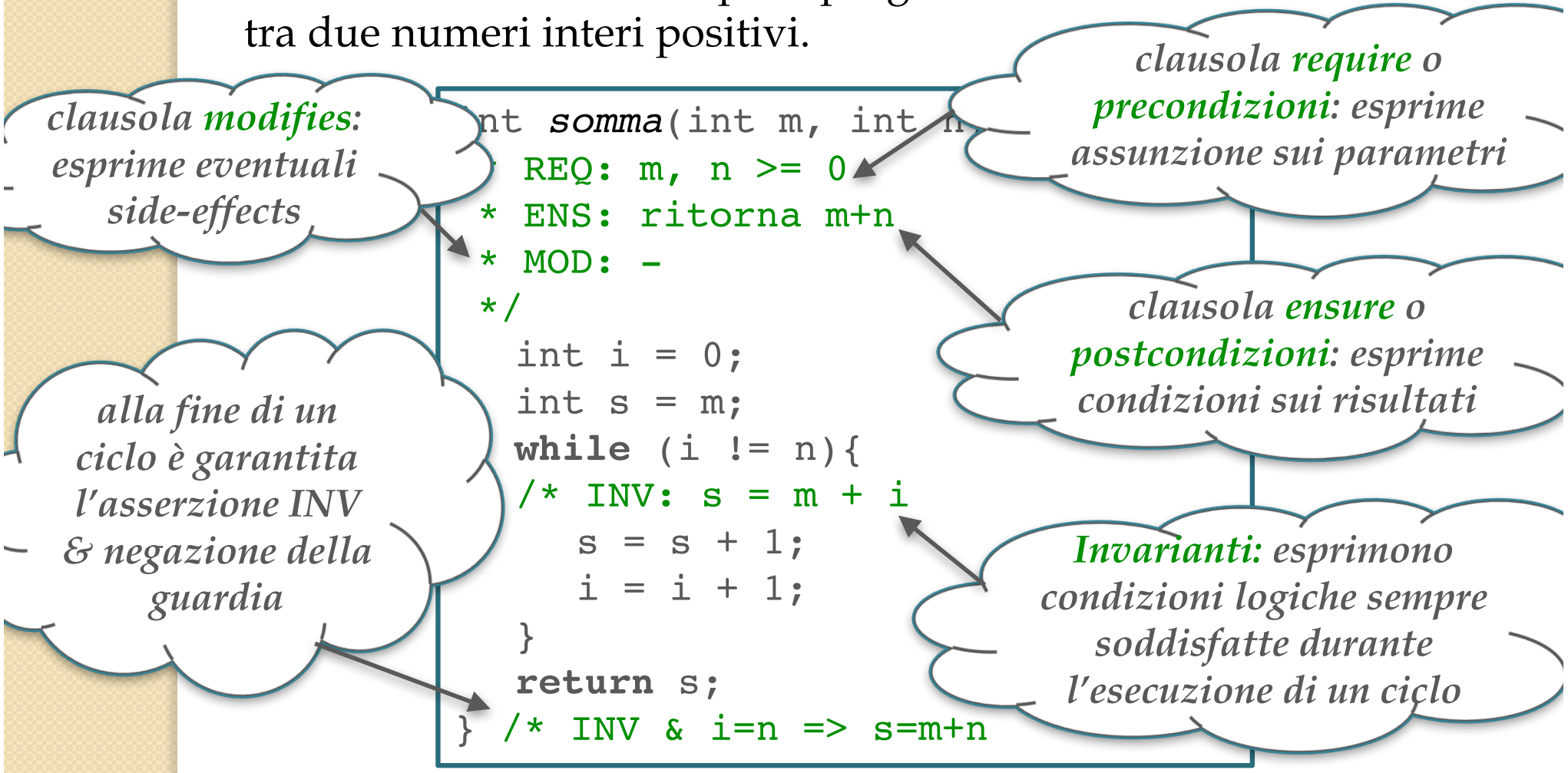


Tiny C

Cominciamo con un frammento minimale del C, contenente **if**, **while**, sequenza, assegnazioni e variabili intere.

L'unica espressione ammessa è +1 e la verifica di uguaglianza ==.

Cominciamo con un semplice programma che calcola la somma tra due numeri interi positivi.



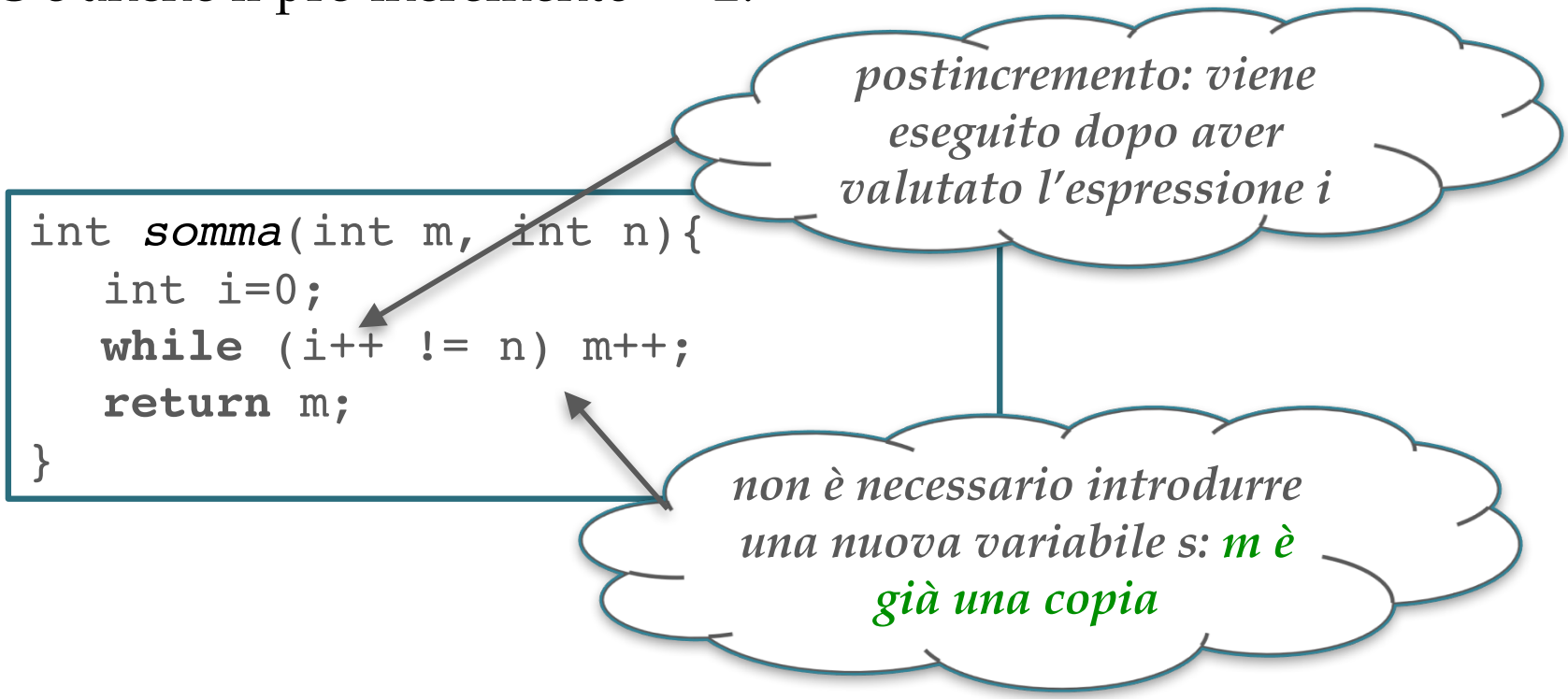
Vero Programmatore C

Ovviamente, un vero programmatore **C** baratterebbe un anno di vita per risparmiare una riga di codice o anche pochi spazi.

Adeguiamoci subito al galateo del Vero Programmatore **C**.

Ricordate che **`i++`** è "equivalente" a **`i = i + 1`** e non a `i+1`!!

C'è anche il pre-incremento `++i`.



Osservazione: comandi ed espressioni

A rigore, `i++` **non è un'espressione**, ma piuttosto un **comando**.

In **C** però c'è una totale promiscuità tra comandi (= che modificano la memoria) ed espressioni (che valutano un valore).

In particolare, tutti i comandi restituiscono un valore. In particolare le **assegnazioni restituiscono il valore assegnato**.

Attenzione! Questo può portare a errori subdoli. Ad esempio:

```
if (x=0) printf("pippo"); else printf("pluto");
```

non viene segnalata come errore dal compilatore. L'espressione valuta sempre a 0 (= false) e x viene assegnata con 0.

Il test di uguaglianza è ==.

Ovviamente, tutto ciò permette dei programmi molto compatti anche se non sempre leggibili. Un gusto tutto **C**.

Verifiche di Correttezza

Faremo prove di correttezza dei programmi, basate sulle asserzioni logiche. Tali asserzioni logiche dipendono dai valori delle variabili di programma.

Converremo di scrivere: m_0, n_0 per i **valori iniziali** delle variabili `m`, `n` all'interno della funzione.

In un ciclo scriveremo m', n' per i valori assunti dalle variabili `m` e `n` **dopo l'esecuzione del ciclo** e m, n i valori assunti **prima**.

Nel nostro esempio, avremo che nel ciclo è sempre vero che $m=m_0+i$. Infatti, **è vero all'ingresso del ciclo** in quanto $i=0$ & $m_0=m$. Si mantiene a ogni esecuzione perché $m'=m+1$ e $i'=i+1$ e quindi: $m=m_0+i \Rightarrow m+1=m_0+i+1 \Rightarrow m'=m_0+i'$.

La **terminazione** è garantita dal fatto che $n' - i' < n - i$ e all'interno del ciclo $n - i > 0$ (questo è garantito dalla guardia del while).

```
int somma(int m, int n){
   int i=0;
   while (i++ != n) m++;
   return m;
}
```

Teorema di iterazione finita

Teorema. Sia φ una proprietà che dipende dalle variabili $x_1, \ldots, x_n$ di un programma. Se:

- la proprietà φ è soddisfatta all'ingresso del ciclo `while(B)C`
- l'esecuzione di `C` conserva al proprietà φ
- il ciclo termina

Allora, l'asserzione φ & $\neg B$ è soddisfatta all'uscita del ciclo.

Teorema. Sia t una funzione a valori interi che dipende dalle variabili $x_1, \ldots, x_n$ di un programma. Se all'interno di un ciclo `while(B)C` con invariante φ:

- φ & B implica $t(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$
- φ & B implica $t(x'_1, \ldots, x'_n) < t(x_1, \ldots, x_n)$

Allora il ciclo termina dopo un numero finito di passi.

Dim: (Sketch) Non ci sono catene infinite decrescenti in $\mathbb{N}$. □

Ricorsione

Volendo, potremo giocare con un altro frammento del C che io chiamo TinyReC, in cui ho solo **if** e funzioni ricorsive.

Ovviamente, anche questo frammento permette di calcolare qualunque cosa (è una "specie" di lambda-calcolo – se non uso neanche le assegnazioni!)

```
int sommaRec(int m, int n){
   return sommaRecAux(m, n, 0);
}

int sommaRecAux(int m, int n, int i){
   if (i==n) return m;
   return sommaRecAux(m+1, n, i+1);
}
```

Ricorsione

Possiamo scrivere una funzione da **Vero Programmatore C** che evita la funzione ausiliaria e il parametro ausiliario `i`:

```
int sommaRecVPC(int m, int n){
   if (!n) return m;
   return sommaRecVPC(m+1, n-1);
}
```

Attenzione invece che il seguente programma **non funziona**!

```
int sommaRecWrong(int m, int n){
   if (!n) return m;
   return sommaRecVPC(m++, n--);
}
```

infatti l'incremento/decremento avviene **dopo la valutazione dell'espressione** per il passaggio dei parametri.

Funzionerebbe con `++m` e `--n`, ma tutto sommato non ha molto senso modificare i valori di m ed n.

Predecessore

Ci siamo presi già la liberta di sottrarre 1, ma in realtà è possibile definire anche la funzione predecessore, partendo da +1.

Idea: usare due indici, mantenendo la proprietà $i=j+1$ fino a che i non diventa n. $i=j+1$ & $i=n$ implica $n=j+1$ (per sostituzione) e quindi $j=n-1$.

Terminazione: La funzione $n - j$ è sempre decrescente. Infatti ho $n' - j' = n - (j + 1) = n - j - 1$, ma non è necessariamente sempre positiva! Infatti, se n fosse 0, $n - j = -1$. Infatti, in tal caso il programma non termina!

```
int pred(int n){
   int i = 0;
   int j = 1;
   while (j != n){
   /* INV: i = j + 1 */
      i++;
      j++;
   }
   return i;
}
```

Predecessore: assert

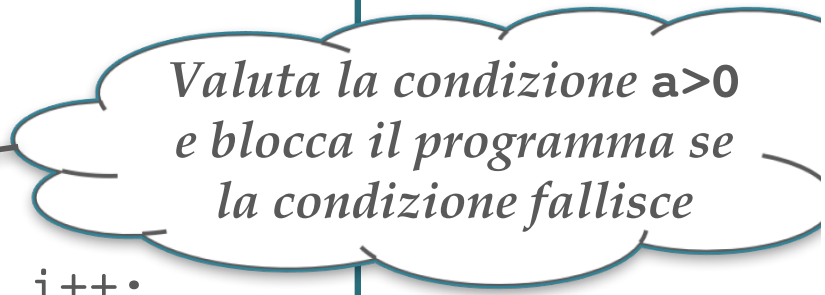
In realtà la funzione è corretta rispetto alla specifica:

$$pred\ n = n - 1 \qquad n > 0$$

Completare questa funzione facendo tornare un valore arbitrario su 0 (per esempio 0 oppure 42) **non è più corretto** rispetto alla funzione non terminante!

La cosa migliore, è far terminare il programma con un'eccezione. Cogliamo l'occasione per mostrare un programma da Vero programmatore C con una variabile in meno.

```
#include<assert.h>
int pred(int a){
/* REQ: a>0
 * ENS: return a-1
 */
   assert(a>0);
   int i = 0;
   while (i+1 != a) i++;
      /* INV: i < a */
   return i;
}
```



Predecessore: Sperimentazioni

Verificate cosa succede in **C** se eseguite il programma predecessore su input 0.

Fate lo stesso esperimento in Python.

Rifate lo stesso esperimento (in Python, **C** e Haskell) dopo che abbiamo scritto la versione ricorsiva.

Cosa ne deducete?

Comparazione

Scriviamo un programma `int compareTo(int m, int n)` che restituisce 1 se $m>n$, 0 se $m=n$ e -1 altrimenti.

```
int compareTo(int m, int n){
/* REQ: m,n>=0 */
   if (m==n) return 0;
   while (m && n){
      m = pred(m);
      n = pred(n);
   }
   if (n) return -1;
   return 1;
}
```

Esercizio: scrivere invarianti, funzione di terminazione etc.

Note sulla complessità in Tiny C

Anche se Turing-completo, il TinyC (o TinyReC) introduce enormi inefficienze dovute alla rappresentazione unaria dei naturali.

Funzioni semplicissime, come il predecessore sono lineari nel numero su cui fare il predecessore.

Ad esempio, **un programma che conta in avanti è più efficiente di uno che conta all'indietro**.

In generale, il programma che calcola una funzione (che cresce molto rispetto a n) $f(n)$ **ha una complessità almeno di** $f(n)$**:** infatti nel caso fortunato possiamo costruire il valore $f(n)$.

Nella Teoria degli Algoritmi si fa l'ipotesi che un'operazione aritmetica costi sempre $O(1)$ (ipotesi del **costo costante**).

Funziona quando i programmi non calcolano numeri particolarmente grandi . Non funziona quando si calcolano funzioni che crescono molto (come fattoriale o fibonacci etc.) nel qual caso è più opportuno fare l'ipotesi del **costo logaritmico**.

Comparazione revisited

Scriviamo un programma `int compareTo(int m, int n)` che restituisce 1 se $m>n$, 0 se $m=n$ e -1 altrimenti.

Questa volta però contiamo in avanti e scegliamo la comodità al posto delll'eleganza:

```
int compareTo(int m, int n){
/* REQ: m,n>=0 */
   int i=0;
   if (m == n) return 0;
   while (42){
      if (i == m) return -1;
      if (i == n) return 1;
      i++;
   }
}
```

Esercizio: scrivere invarianti, funzione di terminazione etc.

Condizioni Logiche in C

Abbiamo giocato a usare poche istruzioni: condizioni logiche solo nella forma exp_1==exp_2 oppure exp_1!=exp_2.

In **C** **non c'è** il tipo **booleano**: in compenso, a **tutti i valori di ogni tipo di dato base è associato un valore di verità**.

Per gli interi, `0` vale false e diverso da 0 vale true.

Per i puntatori, `NULL` vale false, e diverso da 0 vale true.

Per cui, espressioni come:

```
if (4) printf("pluto"); else printf("pippo");
```

sono perfettamente legittime (e in questo caso stampa `pluto`).

Possiamo scrivere un programma super-compresso per la somma:

```
int somma(int m, int n){
   while (n--) m++;
   return m;
}
```

Lezione 19b

Sintesi di Programmi da Asserzioni Logiche

Divisione Intera

Scriviamo un programma che calcola la divisione intera (o il resto) per un esecutore che sa fare solo somme/differenze.

Ricordiamo cosa significa fare la divisione intera: dati due numeri m ed $n > 0$, occorre trovare due numeri tali che:

$$m = qn + r \;\&\; 0 \leq r < n$$

Questa è quindi la post-condizione della nostra funzione. L'idea standard in questi casi è **indebolire** la post-condizione: ci sono infinite coppie q, r tali che $m = qn + r$ (è l'equazione di una retta).

È sufficiente trovare l'unica coppia tale che $0 \leq r < n$.

Quindi: $m = qn + r$ è l'invariante naturale del ciclo: ponendo q=0 e $r = m$ otteniamo facilmente una coppia di valori che lo soddisfa.

Incrementando q di 1, l'invariante si mantiene sottraendo n ad r. Infatti: $q'n' + r' = (q+1)n + (r - n) = qn + n + r - n = qn + r$.

$r \geq n$ è la guardia naturale (esco quando soddisfo la seconda condizione, cioè $0 \leq r < n$). Osserviamo che sotto l'ipotesi $n > 0$, r è una funzione di terminazione.

Divisione intera iterativa

Fatte le precedenti osservazioni, la funzione si scrive da sola.

Cosa succede se $n = 0$?

Osservate che la stessa funzione può essere usata per calcolare il resto (usualmente chiamato mod).

```
int div(int m, int n){
/* REQ: n > 0 */
   int q = 0;
   int r = m;
   while (r>=n){
   /* INV: m=q*n+r */
      r -= n;
      q++;
   }
   return q;
   /* return r calcola il resto */
}
```

r -= n (o **+=**, ***=** *etc.*) è *equivalente a* **r = r - n**

Moltiplicazione Egiziana: def

Problema 1: *Scrivere una funzione che calcoli la moltiplicazione sfruttando le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned} m \times 2n &= (m+m) \times n \quad (n > 1) \\ m \times (2n+1) &= m \times 2n + m \\ m \times 0 &= 0 \end{aligned}$$

Idea: somme e moltiplicazioni ×2 sono operazioni più facili di fare prodotti generali (**provare per credere**).

Si tratta di una definizione induttiva alternativa del prodotto, che definisce il prodotto per **induzione** sul secondo parametro.

Specifica quanto vale il prodotto in 3 casi (gra loro mutuamente esclusivi): 0 (**caso base**) e numero pari o dispari, sempre in termini di prodotti con un secondo fattore **minore**.

Moltiplic. Egiziana ricorsiva

Data una definizione induttiva, modulo un po' di sintassi, è immediato scrivere un programma ricorsivo anche in **C**:

```
int multEgypt(int m, int n){
   /* caso base */
   if (n==0) /* if (!n)
       return 0;
   /* caso dispari */
   if (n % 2 == 1) /* if (n % 2)
       return m + multEgypt(m, n-1);
   /* caso pari */
   return multEgypt(m+m, n/2)
}
```

Moltiplic. Egiziana iterativa

Già per questo programma molto semplice, la soluzione iterativa è meno ovvia.

Come spesso accade l'idea è quella di usare una **variabile accumulatore**, diciamo p (per prodotto).

Operando direttamente su due variabili di ingresso m ed n, l'idea è di mantenere **invariante** la quantità $p+mn = m_0n_0$.

È facile entrare nel ciclo soddisfacendo l'invariante, semplicemente inizializzando p a 0.

- Se n è **dispari**, sottraggo 1 a n e sommo m a p. Infatti, in tal caso: $p'+m'n'=p+m+m(n-1)=p+m+mn-m=p+mn= m_0n_0$
- Se n è **pari**, dimezzo n e raddoppio m. Infatti, in tal caso: $p'+m'n'=p+2m(n/2)=p+mn= m_0n_0$

Ovviamente, quando n diventa 0 ho che $p=m_0n_0$. E quindi n è la funzione di **terminazione** (decresce a ogni iterazione) e $n \neq 0$ la guardia.

Moltiplic. Egiziana iterativa

Fatti i ragionamenti alla slide precedente, il programma si scrive da solo dalle asserzioni logiche:

```
int multEgypt(int m, int n){
   int p = 0;
   while (n != 0){
   /* INV: r + m * n = m0*n0
    * T = n
    */
      if (n%2) { p += m;
                 n--;
      } else { m = m * 2;
               n = n / 2;
      } /* endelse */
   } /* endwhile */
   return p;
}
```

Lezione 19

That's all Folks!

Grazie per l'attenzione…

…Domande?