Metodi Matematici per l'Informatica (secondo canale)

Nome e Cognome: Matricola: Anno di corso:

Es 1. Sia $A = \{2, \{2, 7, 5\}, 4, (1, 2, 3), 3\}$. Allora:

A□. $\{5\} \subseteq A$; FALSO (equivale a $5 \in A$)

B□. $\{2, 5, 7\} \in A$; VERO ($\{2, 5, 7\}$ è identico a $\{2, 7, 5\}$)

C□. $\{5, 7\} \subseteq A$; FALSO (equivale a $5 \in A$ e $7 \in A$)

D□. $(2, 3) \in A$; FALSO (A non contiene coppie ordinate)

E□. $\{2, 3\} \subseteq A$; VERO ($2 \in A$ e $3 \in A$)

F□. $\exists x, y \in A$ tali che $x \in y$; VERO ($x = 2$, $y = \{2, 7, 5\}$)

G□. $\exists x, y, z \in A$ tali che $\{x, y\} \subseteq z$. FALSO (se si richiede che x e y siano distinti. Altrimenti VERO per $x = 2 = y$ e $z = \{2, 7, 5\}$).

Es 2. La chiusura transitiva della relazione $R = \{(c, a), (a, c), (c, b), (b, a)\} \subseteq \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ è

A□. $\{(x, x) \mid x \in \{a, b, c\}\}$; FALSO

B□. $\{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$; VERO

C□. $\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$; FALSO

D□. una relazione di equivalenza; VERO

E□. nessuna delle risposte precedenti è corretta. FALSO

Es 3. Sia $Q = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c)\} \subseteq (\{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}) - \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$; allora

A□. Q è una funzione iniettiva; FALSO ($(a, c) \in Q$ e $(b, c) \in Q$)

B□. Q è una relazione di equivalenza; FALSO (non è né simmetrica né riflessiva)

C□. Q è una relazione transitiva; VERO (la transitività si può applicare solo alle coppie (a, b) e (b, c) e si ha che $(a, c) \in Q$ come richiesto).

D□. Q non è una funzione; VERO (esistono elementi del dominio con più di una immagine, per es. a).

E□. nessuna delle risposte precedenti è corretta. FALSO

Es 4. Diciamo che un insieme è *numerabile* se è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme dei naturali. Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che

A□. se A è numerabile allora $A \cap B$ è numerabile; VERO

B□. se A e B sono numerabili allora $A \cap B$ è numerabile; VERO

C□. se A e B non sono numerabili allora $A \cap B$ non è numerabile; FALSO (per esempio l'intersezione potrebbe essere vuota, oppure considerando i seguenti sottinsiemi non numerabili dei reali $A = (-\infty, 0]$ e $B = [0, +\infty)$ si ha che l'intersezione è l'insieme numerabile $\{0\}$).

D□. se A e B sono numerabili allora $A \cup B$ è numerabile; VERO

E□. nessuna delle risposte precedenti è corretta. FALSO

Es 5. Diciamo che un sottoinsieme A di $\mathbf{N}$ è *cofinito* se $\mathbf{N} - A$ è finito. Per ogni coppia di insiemi A e B si ha che

A□. A è finito; (ERRATA CORRIGE: questa domanda non aveva senso compiuto).

B□. se A e B sono cofiniti allora $A \cap B$ è cofinito; VERO ($N - (A \cap B) = (N - A) \cup (N - B)$ e l'unione di due finiti è finita)

C□. se A e B sono cofiniti allora $A \cup B$ è cofinito; VERO

D□. se A e B sono cofiniti allora $A - B$ è cofinito; FALSO (es. $A = \mathbf{N}$ è cofinito, $B = \{2, 3, 4, \dots\}$ è cofinito, $A - B = \{0, 1\}$ non è cofinito).

E□. nessuna delle risposte precedenti è corretta. FALSO

Es 6. Sia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ così definita: $f(0) = 1, f(n+1) = 3f(n) + 1$. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbf{N}$,

$$f(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 3^i.$$

Caso Base ($n = 0$): $f(0) = 1 = 1 + \sum_{i=1}^{0} 3^i$.

Passo Induttivo ($n + 1$):

$$f(n+1) = 3f(n)+1 = 1+3(1+\sum_{i=1}^{n} 3^i) = 1+3+3\sum_{i=1}^{n} 3^i = 1+3+\sum_{i=1}^{n} 3^{i+1} = 1+3+\sum_{i=2}^{n+1} 3^i = 1+\sum_{i=1}^{n+1} 3^i.$$

Es 7. Vero o Falso?

A□. Se $A \models \neg A$ allora A è insoddisfacibile; VERO (una struttura che soddisfacesse A dovrebbe soddisfare anche $\neg A$).

B□. Se A è una tautologia allora $B \models A$ per ogni B; VERO (A è vera in ogni struttura, in particolare quelle che soddisfano B).

C□. Se $\neg A$ è una tautologia allora il tableau di $A \wedge B$ ha tutti i rami chiusi; VERO (A è insoddisfacibile e dunque anche $A \wedge B$).

D□. Se $(A \wedge B)$ è soddisfacibile allora il tableau di A oppure il tableau di B hanno qualche ramo aperto; VERO (altrimenti sia A che B sarebbero insoddisfacibili e a fortiori lo sarebbe $A \wedge B$).

E□. $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \vee B) \to (A \wedge B))$. VERO

Es 8. Trovare forme normali CNF e DNF per la proposizione A definita dalla seguente tavola di verità.

ERRATA CORRIGE: la tavola conteneva un refuso (1 invece di 0 in seconda colonna sesta riga). La soluzione qui sotto è per la tavola corretta.

p_1	p_2	p_3	A
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
0	1	0	1

DNF: $(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$

CNF: $(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_3)$.

Es 9. I seguenti i enunciati sono verità logiche: Vero o Falso?

A□. $\exists x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \exists x B(x))$; VERO

B□. $\exists x \forall y A(x, y) \to \forall x \exists y A(x, y)$; FALSO

C$\square$. $\forall x \exists y A(x,y) \rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$. FALSO

Es 10. Formalizzare in un linguaggio predicativo adeguato. (N.B. Per il punto C è conveniente usare una relazione ternaria $R(x,y,z)$ con il significato di: il programma x sull'input y restituisce l'output z).

A. Qualche studente di Informatica è più bravo di tutti gli studenti di Statistica;
$\exists x(I(x) \wedge \forall y(S(y) \rightarrow B(x,y)))$,
dove $I()$ sta per "è studente di Informatica", $S()$ sta per "è studente di Statistica", $B(x,y)$ sta per "x è più bravo di y".

B. Nessun numero primo maggiore di 2 è pari;
$\neg \exists x(P(x) \wedge M(x) \wedge E(x))$,
(dove $P()$ sta per "è primo", $M()$ sta per "è maggiore di 2" e $E()$ sta per "è pari").

C. Non tutti i programmi restituiscono un output su tutti gli input;
$\exists x(P(x) \wedge \exists y \forall z \neg R(x,y,z))$,
(dove $P()$ sta per "è un programma").