Metodi Matematici per l'Informatica (Canale P-Z) - AA 2008-09

Massimo Lauria

11/12/2008

Metodo di induzione Si vuole verificare una proprietà P definita sui numeri naturali sia vera su ognuno di essi. Il principio di induzione afferma che nel caso in cui si verifichino simultaneamente le due seguenti condizioni:

CASO BASE: P è vera sul numero 0.

PASSO INDUTTIVO: Ogni qualvolta P è vera sul numero m allora è anche vera sul numero $m+1$.

allora si verifica sempre la seguente affermazione:

INDUZIONE: P è vera su ogni numero naturale n.

Più schematicamente possiamo indicare con $P(n)$ la frase "La proprietà P è vera per il numero n". Quindi verificare il caso base equivale a verificare che $P(0)$ sia vera. Il passo induttivo equivale a verificare che $P(m)$ implichi $P(m+1)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Esercizi del giorno 11/12/2008

Problema 1. *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONE: Nel caso base $P(0)$ si verifica che la somma di 0 numeri fa 0. Per il passo induttivo dobbiamo mostrare per un m generico che se vale $P(m)$, allora vale anche $P(m+1)$. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$\sum_{k=0}^{m} k = \frac{m \cdot (m+1)}{2} \tag{1}$$

Il calcolo può essere svolto in questo modo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} k &= (m+1) + \sum_{i=0}^{m} k && \text{estraggo l'ultimo termine della sommatoria.}\\
&= (m+1) + \frac{m(m+1)}{2} && \text{applico l'ipotesi induttiva ovvero la formula (1).}\\
&= \frac{2(m+1) + m(m+1)}{2} && \text{metto a denominatore comune.}\\
&= \frac{(m+2)(m+1)}{2} && \\
&= \frac{(m+1)(m+2)}{2} && \text{riscrivo la formula nella forma iniziale, per chiarezza.}
\end{aligned}$$

Problema 2. *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Nel caso base $P(0)$ si verifica che la somma di 0 numeri fa 0. Per il passo induttivo dobbiamo mostrare per un m generico che se vale $P(m)$, allora vale anche $P(m+1)$. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m \cdot (m+1)(2m+1)}{6} \tag{2}$$

Il calcolo può essere svolto in questo modo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} k &= (m+1)^2 + \sum_{i=0}^{m} k^2 && \text{estraggo l'ultimo termine della sommatoria.} \\
&= (m+1)^2 + \frac{m \cdot (m+1)(2m+1)}{6} && \text{applico l'ipotesi induttiva ovvero la formula (2).} \\
&= (6(m+1) + m \cdot (2m+1)) \cdot \frac{m+1}{6} && \text{metto in evidenza } \frac{m+1}{6}. \\
&= (6m + 6 + 2m^2 + m) \cdot \frac{m+1}{6} \\
&= (2m^2 + 7m + 6) \cdot \frac{m+1}{6} \\
&= (2m+3)(m+2) \cdot \frac{m+1}{6} && \text{scompongo il polinomio quadratico.} \\
&= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} && \text{riscrivo la formula nella forma iniziale, per chiarezza.}
\end{aligned}$$

Problema 3. *Dimostrare per induzione che*

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ *maggiore o uguale a 2.*

Soluzione: Vogliamo verificare la formula per tutti i numeri naturali maggiori o uguali a 2. Quindi il caso base è $P(2)$, $\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, che è facilmente verificabile. Per il passo induttivo dobbiamo mostrare per un m generico che se vale $P(m)$, allora vale anche $P(m+1)$. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$\prod_{k=2}^{m} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{m} \tag{3}$$

Prima di procedere con il passo induttivo si verifichi (indizio: basta mettere a denominatore comune) che per ogni m vale

$$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{m}{m+1} \tag{4}$$

Il calcolo può essere svolto in questo modo:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{m+1}\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \left(1-\frac{1}{m+1}\right)\cdot\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{k}\right) && \text{estraggo l'ultimo termine dalla produttoria.}\\
&= \frac{m}{m+1}\cdot\prod_{k=2}^{m}\left(1-\frac{1}{k}\right) && \text{applico il passaggio spiegato in (4).}\\
&= \frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{m} && \text{applico l'ipotesi induttiva ovvero la formula (3).}\\
&= \frac{1}{m+1}
\end{aligned}
$$

Problema 4. *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Nel caso base $P(0)$ si verifica facilmente che $2^0 = 2^1 - 1 = 1$, perché per un qualunque $a \in \mathbb{R}$ diverso da zero vale che $a^0 = 1$. Per il passo induttivo dobbiamo mostrare per un m generico che se vale $P(m)$, allora vale anche $P(m+1)$. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1}-1 \tag{5}$$

Il calcolo può essere svolto in questo modo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+1} 2^i &= 2^{m+1}+\sum_{i=0}^{m} 2^i && \text{estraggo l'ultimo termine della sommatoria.}\\
&= 2^{m+1}+2^{m+1}-1 && \text{applico l'ipotesi induttiva ovvero la formula (5).}\\
&= 2\cdot(2^{m+1})-1 && \text{raggruppo i termini uguali.}\\
&= 2^{m+2}-1 && \text{applico il fatto che } a^b\cdot a^c = a^{b+c}.
\end{aligned}
$$

Problema 5. *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{i=0}^{n} 4^i = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Nel caso base $P(0)$ si verifica facilmente che $4^0 = \frac{4^1-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Per il passo induttivo dobbiamo mostrare per un m generico che se vale $P(m)$, allora vale anche $P(m+1)$. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$\sum_{i=0}^{m} 4^i = \frac{4^{m+1}-1}{3} \tag{6}$$

Il calcolo può essere svolto in questo modo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+1} 4^i &= 4^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} 4^i && \text{estraggo l'ultimo termine della sommatoria.}\\
&= 4^{m+1} + \frac{4^{m+1}-1}{3} && \text{applico l'ipotesi induttiva ovvero la formula (6).}\\
&= \frac{3 \cdot 4^{m+1} + 4^{m+1} - 1}{3}\\
&= \frac{4 \cdot 4^{m+1} - 1}{3}\\
&= \frac{4^{m+2}-1}{3}
\end{aligned}
$$

Problema 6. *Dimostrare per induzione che per un qualunque generico $a \neq 1$ e qualunque $n \in \mathbb{N}$ vale l'equazione*

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Soluzione: Nel caso base $P(0)$ si verifica facilmente che $a^0 = \frac{a^1-1}{a-1} = 1$. Per il passo induttivo dobbiamo mostrare per un m generico che se vale $P(m)$, allora vale anche $P(m+1)$. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$\sum_{i=0}^{m} a^i = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \tag{7}$$

Il calcolo può essere svolto in questo modo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m+1} a^i &= a^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} a^i && \text{estraggo l'ultimo termine della sommatoria.}\\
&= a^{m+1} + \frac{a^{m+1}-1}{a-1} && \text{applico l'ipotesi induttiva ovvero la formula (7).}\\
&= \frac{(a-1) \cdot a^{m+1} + a^{m+1} - 1}{a-1} && \text{riduco a denominatore comune.}\\
&= \frac{a^{m+2}-1}{a-1}
\end{aligned}
$$