Errata corrige del libro “Introduzione alla logica e al linguaggio matematico”

28 gennaio 2009

Capitolo 1

- Pag. 7, **Definizione 6.** Il complemento di un sottoinsieme A di I è il sottoinsieme $\overline{A} = \{x \in I : x \notin A\}$.

- Pag. 8, **Definizione 8** Sia $S \subseteq A \times B$. **Si** dice proiezione di S su A (rispettivamente, su B) l'insieme $\{x : x \in A \underline{e} (x, b) \in S$, per almeno un $b \in B\}$ (rispettivamente, $\{y : y \in B \underline{e} (a, y) \in S$, per almeno un $a \in A\}$).

- Pag. 8, **Esempio 10** Sia T il sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ costituito dalle coppie (n, r) tali che $r = \sqrt{n}$. La proiezione di T sulla prima componente è $\mathbb{N}$ mentre la proiezione di T sulla seconda componente è $\{r \in \mathbb{R}_+ : r^2 \in \mathbb{N}\}$.

Capitolo 2

- Pag. 16, **Esempio 14.** Consideriamo, nell'insieme J dei segmenti del piano, la $S \subseteq J \times J$ tale che $S = \{(a, b)$: la lunghezza di a è non minore di quella di $b\}$. Tale relazione gode delle proprietà:

  1. *riflessiva*, perché la lunghezza di ogni segmento è non minore di se stessa;
  2. *antisimmetrica*, perché se la lunghezza di un primo segmento è non minore della lunghezza di un secondo ed inoltre la lunghezza

del secondo segmento è non minore di quella del primo, allora i due segmenti considerati hanno la stessa lunghezza;

3. *transitiva*, perché se la lunghezza di un segmento a è non minore di quella di un segmento b e la lunghezza del segmento b è non minore di quella di un segmento c, allora la lunghezza di a è non minore di quella di $\boldsymbol{c}$.

La relazione S non gode delle altre proprietà sopra esaminate (antiriflessiva e simmetrica).

- Pag. 18, **Definizione 18.** Si dice *insieme quoziente* dell'insieme I rispetto alla relazione R l'insieme $I/_R$ delle classi di equivalenza degli elementi di I rispetto alla relazione di equivalenza R.

- Pag. 21, **Definizione 22.** Dato un insieme X e una relazione d'ordine $\leq$ su di esso, si dice:
(...)
\- *minimo* un elemento x_0 tale che per ogni $x \in X$ accade $x_0 \leq x$;
(...)

- Pag. 24, **Esercizio 34.** Si consideri l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, cioè l'insieme di coppie ordinate dei numeri interi, la cui seconda componente non sia nulla. Sia $\simeq$ la relazione su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ definita nel modo seguente: (a, b) è in relazione a (c, d) (scritto $(a, b) \simeq (c, d)$) se e solo se $ad = bc$. Dimostrare che $\simeq$ è una relazione di equivalenza.
(Si sostituisca anche nella soluzione dell'esercizio ogni occorrenza del simbolo $\mathbb{Z}^+$ con il simbolo $\mathbb{Z}_0$.)

- Pag. 25, **Esercizio 35.** (...)

  – $\sim \subseteq \simeq$. (...)

  – $\simeq \subseteq \sim$. (...)

  (...)
  (Si sostituisca inoltre ogni occorrenza del simbolo $\mathbb{Z}^+$ con il simbolo $\mathbb{Z}_0$).

- Pag. 27, **Esercizio 46.** Similmente agli Esercizi 34 e 35, si definisca una relazione $\simeq \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ tale che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\simeq}$ possa essere usata per definire i numeri interi $\mathbb{Z}$.

Capitolo 3

- Pag. 37, **Esercizio 55.** Siano $f(x) = k + 5 + x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, dove $\sqrt{x}$ è la funzione che restituisce la radice quadrata del numero x. Per quali valori di k sia $g \circ f$ e $f \circ g$ sono entrambe definite?
  Soluzione: Anzitutto, osserviamo che $dom(g) = \mathbb{R}_+$, cioè i reali non negativi. Pertanto, affinché $g \circ f$ sia definita, deve essere che $k+5+x^2 \geq 0$; **da cui si ottiene** $k \geq -5$. Invece, $dom(f) = \mathbb{R}$ e quindi, qualunque sia k, $f \circ g$ è definita.

Capitolo 5

- Pag. 57, quarta riga: Cerchiamo ora di formalizzare il **principio** di induzione.

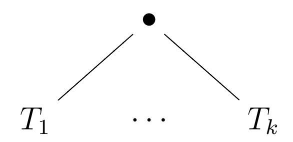
- Pag. 58, **Esempio 44.** (...)

  1. Caso base: se $n = 0$, allora $I = \emptyset$ e dunque $\#\wp(I) = \#\{\emptyset\} = 1 = 2^0$. La tesi è quindi valida per questo primo caso.

  (...)

- Pag. 60, **Proposizione 11.** '$\leq$' è un buon ordinamento su $\mathbb{N}$.
  Dimostrazione: Dimostriamo dapprima che i naturali sono totalmente ordinati rispetto a $\leq$, cioè sono una *catena*. A tal scopo, facciamo vedere che, dati due numeri naturali n ed m, accade sempre che $n \leq m$ o $m \leq n$, cioè sono confrontabili. Sia C l'insieme dei naturali confrontabili con ogni altro. Sicuramente $0 \in C$, perché $0 + n = n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se $m \in C$, allora anche $m+1 \in C$ e quindi C coincide con $\mathbb{N}$: infatti, preso comunque n, o $n \leq m$ (cioè $n+h = m$) o $m \leq n$ (cioè $m + k = n$); nel primo caso,$n \leq m + 1$ perché $n + h + 1 = m + 1$; nel secondo o $k = 0$, $m = n$ e $n \leq m + 1$, oppure $k = r + 1$ e $m + 1 \leq n$. (...)

- Pag. 61, **Esempio 47.** Diamo una definizione ricorsiva (ossia, induttiva) di *albero finito non vuoto*: un singolo nodo, indicato con '$\bullet$', è un albero; se $T_1, \ldots, T_k$ sono alberi, allora



è un albero (diremo che $T_1, \ldots, T_k$ sono *figli* del nodo '•', chiamato *radice dell'albero*).
(...)

- Pag. 63, undicesima riga dal basso: Ciò è lecito (la **definizione è** ben posta) (...)

- Pag. 65, **5.3.3 I numeri primi**
In questo paragrafo presenteremo le principali nozioni collegate ai numeri primi **e** forniremo alcune dimostrazioni. (...)

- Pag. 69, **Esercizio 85.** Sia $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una famiglia di funzioni definite come $f_m(0) = m$, $f_m(n+1) = f_m(n) + 1$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.
(a) Qual è il risultato di $f_{52}(39)$?
(b) Quale proprietà di $f_x(y)$ si può dimostrare in generale?
Soluzione: Prima di rispondere alla domanda (a), cerchiamo di rispondere alla (b); in questo modo, la risposta alla (a) sarà banale.
Con un po' di attenzione, si può notare che la funzione $f_m(n)$ non fa altro che sommare n a m, incrementando di 1 il numero m per n volte.
Andiamo quindi a dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f_m(n) = m+n$.
Il caso base è per $n = 0$ e, banalmente, $f_m(0) = m = m + 0$. Assumiamo vera la tesi fino a n e dimostriamola per $n + 1$: si ha che $f_m(n+1) = \underline{f_m(n)} + 1 = \underline{m+n} + 1 = m + (n+1)$.
Quindi, $f_{52}(39) = 91$.

- Pag. 72, **Esercizio 93.** (...)
Soluzione: (...) Poichè la **scomposizione** (...)

- Pag. 73, **Esercizio 100.** Si dimostri per induzione che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$; qual è il minimo caso base ammissibile?

- Pag. 73, **Esercizio 104.** Provare per induzione che $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$ (N.B.: la notazione $\Pi \ldots$ denota il prodotto, così come la notazione $\Sigma \ldots$ denota una somma); qual è il minimo caso base ammissibile?

- Pag. 73, **Esercizio 105.** Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ è divisibile per 8.

- Pag. 73, **Esercizio 106.** Qual è il più grande **sottoinsieme** A **di** $\mathbb{N}$ **tale** che $n^3 \geq n + 6$, **per ogni** $n \in A$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo.

- Pag. 74, **Esercizio 113.** *Il 25 non è un numero primo, quindi non andrebbe evidenziato.*

- Pag. 74, **Esercizio 114.** (...) può passare per più **di** un punto primo.

- Pag. 74, **Esercizio 117.** *L'esercizio è identico al numero 115.*

Capitolo 6

- Pag. 78, **Esempio 52.** (...) pertanto, **operano** cifra a cifra (...)

- Pag. 78, penultima riga: Lo stesso discorso si **può** estendere (...)

- Pag. 80, **Esercizio 121.** (...) di un'**algebra** (...)

- Pag. 80, **Esercizio 122.** (...) non vale la **proprietà** (...)

- Pag. 80, **Nota 1.** (...) ci **permette** di (...)

Capitolo 8

- Pag. 93, **Esempio 56.** (...)
  - "è inevitabile che A" è falso (possiamo infatti rappresentare otto in base 2, ottenendo **1000**); (...)

- Pag. 95, **Esempio 58.** La tavola di verità dell'enunciato composto $\neg((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$ è:

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	$\neg((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

Osserviamo che i valori di verità di $\neg((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$ corrispondono a quelli di $\neg A$.

- Pag. 103, **Teorema 1** (Correttezza e completezza del metodo dei tableau). La formula P è valida (è una tautologia) se e soltanto se il tableau per $\neg P$ è chiuso.

- Pag. 104, nona riga: (...)
  1. per qualche $P_0 \in U_0$ è $v(P_0) = F$; (...)

- Pag. 105, ventunesima riga: (...) considerarli **intuitivamente** (...)

- Pag. 106, dodicesima riga dal basso: *Eliminare la ripetizione di* "**scritto** $\vdash P$**.**"

- Pag. 109, **Esempio 71.** La proposizione $A \vee \neg A$ è una tautologia e resta tale se sostituiamo ovunque A con un qualsiasi enunciato, ad esempio $B \to C$: è infatti facile verificare che $(B \to C) \vee \neg(B \to C)$ è una tautologia. D'altra parte, l'enunciato $A \vee \neg B$ non è una tautologia ma lo diventa se sostituiamo sia A che B con l'enunciato $B \to C$.

- Pag. 109, **Nota 2.** (...) insegnò all'**Università** di (...)

- Pag. 110, **Esempio 72.** (...) qualunque istanza dello stesso **schema** di assioma: (...)

- Pag. 112, (...)
  Regole di contrapposizione:

  $$\frac{U \vdash \neg B \to \neg A}{U \vdash A \to B} \qquad \frac{U \vdash A \to B}{U \vdash \neg B \to \neg A}$$

  (...)
  Regole della doppia negazione:

  $$\frac{U \vdash \neg\neg A}{U \vdash A} \qquad \frac{U \vdash A}{U \vdash \neg\neg A}$$

- Pag. 114, **Esercizio 132.** (...)
  Soluzione: Nel caso della congiunzione, l'unico enunciato vero è l'ultimo, poiché una congiunzione è vera se e soltanto se entrambe i congiunti sono veri. Nel caso della disgiunzione, l'unico enunciato falso è il terzo,

poiché una congiunzione è vera se e soltanto se almeno uno dei congiunti è vero. Nel caso dell'**implicazione**, l'unico enunciato falso è il primo, poiché un'implicazione è falsa se e soltanto se la premessa è vera e la conseguenza è falsa. Infine, nel caso della doppia implicazione, gli enunciati veri sono gli ultimi due, poiché una doppia implicazione è vera se e soltanto i due enunciati hanno lo stesso valore di verità.

- Pag. 115, **Esercizio 134.** (...)
  Soluzione: (...)
  La tavola per il terzo enunciato è:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
F	F	F	F	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	**T**	T	T

- Pag. 116, **Esercizio 136.** Usare i risultati **dell'Esercizio 135** per semplificare i seguenti enunciati:

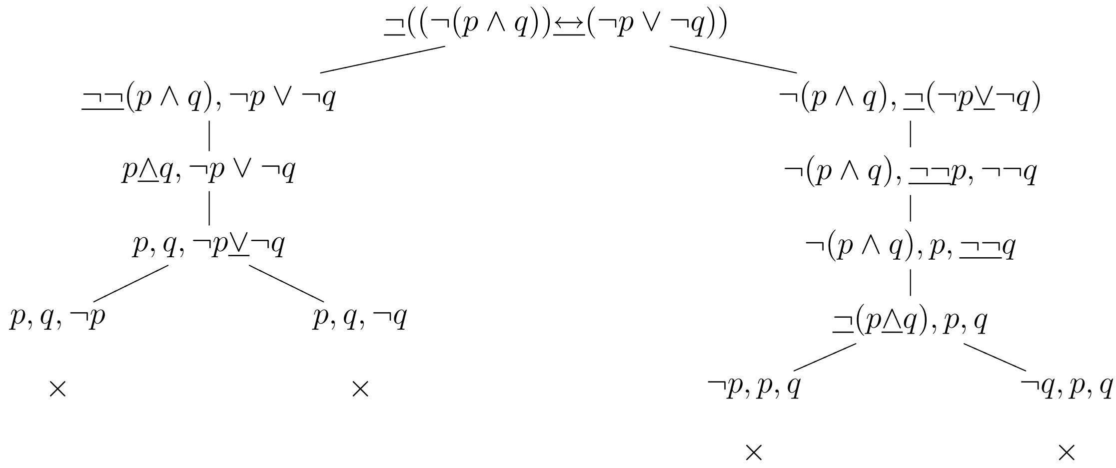
  1. $\neg(\neg p \to q)$;
  2. $\neg(p \wedge \neg q)$;
  3. $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

- Pag. 116, **Esercizio 137.** Verificare usando i tableau la seguente legge di De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

  Soluzione: Costriuremo il tableau per la negata della formula $(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; siccome risulterà chiuso, avremo che $(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow$

$(\neg p \vee \neg q)$ è una tautologia e pertanto l'equivalenza data vale.



(Nella figura precedente l'ultimo nodo in fondo a destra contiene $\neg q, p, q$ e non, come si trova nel libro, $\neg p, p, q$.)

- Pag. 117, **Esercizio 138.** Usando il metodo dei tableau, dire se il **seguente** enunciato è una tautologia:

$$A \to (A \to \neg A).$$

- Pag. 120, **Esercizio 146.** Si dimostri, usando il metodo di Hilbert, che $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$.
Soluzione: Anzitutto, riscriviamo l'enunciato dato in termini di implicazioni e negazioni; in particolare, $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$.

$A \to (B \to C)$	$\vdash A \to (B \to C)$	Ip.
$A \to (B \to C)$	$\vdash A \to (\neg C \to \neg B)$	Es. 159
$A \to (B \to C)$	$\vdash \neg C \to (A \to \neg B)$	Scambio Prem.
$A \to (B \to C)$	$\vdash \neg C \to \neg\neg(A \to \neg B)$	Es. 159
$A \to (B \to C)$	$\vdash \neg(A \to \neg B) \to C$	**Contrapp.**
	$\vdash (A \to (B \to C)) \to (\neg(A \to \neg B) \to C)$	T.D.

- Pag. 123, **Esercizio 159.** Si dimostrino, usando il metodo di Hilbert, le seguenti generalizzazioni delle **regole** di contrapposizione, doppia negazione e transitività:

$$\frac{U \vdash A \to (B \to C)}{U \vdash A \to (\neg C \to \neg B)} \qquad \frac{U \vdash A \to \neg\neg B}{U \vdash A \to B}$$

$$\frac{U \vdash A \to (\neg C \to \neg B)}{U \vdash A \to (B \to C)} \qquad \frac{U \vdash A \to B}{U \vdash A \to \neg\neg B}$$

$$\frac{U \vdash A \to (B \to C) \qquad U \vdash A \to (C \to D)}{U \vdash A \to (B \to D)}$$

Capitolo 9

- Pag. 132, **Esempio 78.** Esprimiamo attraverso la simbologia introdotta il *principio della dimostrazione per assurdo* nella sua forma generale:

  $$\Phi \mid= F \ \textit{se e solo se} \ \Phi \cup \{\neg F\} \mid= \perp$$

- Pag. 136, **Esempio 80.** Consideriamo il seguente tableau, riferito ad una formula con due quantificatori esistenziali:

  $$\begin{array}{c} (\exists x P(x)) \land \exists x \neg(P(x)) \\ | \\ \exists x P(x),\ \exists x \neg(P(x)) \\ | \\ P(a),\ \neg P(a) \end{array}$$

  Potremmo essere tentati di affermare la chiusura di tale tableau, ma sarebbe una conclusione *errata*: l'esistenza di un x per cui è $P(x)$ e di un x per cui è $\neg P(x)$ non implica che tali x siano lo stesso elemento (a meno che ad x non sia imposto di variare in un dominio costituito da un solo elemento). Pertanto l'ultimo nodo avrebbe dovuto essere:

  $$P(a),\ \neg P(b)$$

  e in questo caso il tableau non può essere considerato chiuso.

- Pag. 138, **Esempio 83.** (...) Il ramo di **destra** ci suggerisce, ad esempio, il modello $U = \{a, b\}$ con $|P| = \{(a, b), (a, a)\}$, quello di **sinistra** il modello $U = \{a, b\}$ con $|P| = \emptyset$.

- Pag. 142, terza riga: (...) proposizionale con l'uso **delle** interpretazioni (...)

- Pag. 142, quattordicesima riga: (...) perciò vero **qualunque** sia (...)
- Pag. 143, **Esercizio 167.** (...)
  3. Si discuta la validità/**soddisfacibilità**/contraddittorietà (...)
- Pag. 146, **Esercizio 175.** (...)
  Soluzione: (...)
  Un modello può essere ottenuto costruendo almeno un ramo del tableau della formula data (si veda l'esercizio **173**) (...)