Università di Roma „La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica (A-D)

(Ciascuno dei quesiti seguenti 1-6 ha una ed una sola risposta giusta)

1. La seguente formula $(((P \wedge Q) \rightarrow R) \vee (R \rightarrow S)) \wedge ((S \rightarrow T) \vee \neg(T \wedge S))$

■ A. è una tautologia
☐ B. è una contraddizione
☐ C. è vera se e solo se $P = Q = S = TRUE$
☐ D. è falsificata da ogni assegnamento che dà a Q, R e T lo stesso valore di verità
☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta

2. Sia chiuso il tableau che ha alla radice gli enunciati $F_1,\ldots,F_n$. Allora il tableau che ha alla radice gli enunciati $A,F_1,\ldots,F_n$

☐ A. è aperto qualunque sia l'enunciato A
■ B. è chiuso qualunque sia l'enunciato A
☐ C. è chiuso se e solo se $A = \neg F_i$ per un qualche $i = 1,\ldots,n$
☐ D. non è ammissibile se $A = F_i$ per un qualche i
☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

3. Qual'è la corretta formalizzazione della seguente espressione "se P allora Q, altrimenti R"?

☐ A. $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
☐ B. $(Q \vee P) \rightarrow R$
■ C. $\neg (P \rightarrow Q) \rightarrow R$.
☐ D. $(P \rightarrow Q) \vee R$.
☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

4. La seguente formula del calcolo dei predicati: $\forall x \forall y ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z))$

☐ A. esprime la proprietà transitiva del predicato p(. , .)
☐ B. è valida in ogni modello
■ C. vale in ogni modello il cui universo contenga un solo elemento
☐ D. non si può dire nulla sulla verità della formula poichè questa è aperta
☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

• Qual'è la negazione della formula $\forall x \exists y \exists z \forall t ((p(x,y) \vee q(z,x)) \rightarrow r(x,y,z,t))$?

■ A. $\exists x \forall y \forall z \exists t ((p(x,y) \vee q(z,x)) \wedge \neg r(x,y,z,t))$
☐ B. $\forall x \exists y \exists z \forall t(\neg ((p(x,y) \vee q(z,x)) \rightarrow r(x,y,z,t)))$
☐ C. $\exists x \forall y \forall z \exists t((p(x,y) \vee q(z,x)) \rightarrow r(x,y,z,t))$
☐ D. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

6. In un sistema S, se per ogni P soddisfacibile, P è dimostrabile. Allora:

☐ A. S è corretto e non è completo.
■ B. S è completo e non è corretto.
☐ C. S è corretto e completo.
☐ D. S è corretto, ma non possiamo dire se è completo.
☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta

7. Si dimostri con il metodo di Hilbert la proprietà commutativa della congiunzione logica:

$$(P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$$

(si supponga dimostrato $A \leftrightarrow \neg\neg A$)

<u>Soluzione:</u>

$\{ Q \rightarrow \neg P \} \quad \vdash \quad \neg\neg Q \rightarrow \neg P$
$\{ Q \rightarrow \neg P \} \quad \vdash \quad P \rightarrow \neg Q$
$\{ \} \quad \vdash \quad (Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
$\{ \} \quad \vdash \quad (\neg (P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow (\neg (Q \rightarrow \neg P))$
$\{ \} \quad \vdash \quad (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P)$

Università di Roma „La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Corso di Logica Matematica (A-D)

(Ciascuno dei quesiti seguenti 1-6 ha una ed una sola risposta giusta)

1. La formula $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \rightarrow \exists y\, \forall x\, P(x,y)$ è sicuramente soddisfatta nella seguente interpretazione:

- ☐ A Il dominio ha due elementi e P è interpretato con una relazione non vuota
- ☐ B. Il dominio ha infiniti elementi .
- ☐ C. Il dominio ha un solo elemento.
- ■ D. Il dominio è dato dai numeri naturali, $P(x,y)$ significa "y minore o uguale di x"
- ☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

2. Si consideri la formula $F = \forall x \exists y (p(x) \wedge \neg p(y))$ ed il seguente tableau

$$\begin{array}{c} \neg (\forall x \exists y\, (p(x) \wedge \neg p(y))) \\ | \\ \neg (\exists y\, (p(a) \wedge \neg p(y))) \\ | \\ \neg (\exists y\, (p(a) \wedge \neg p(y))) \;,\quad p(a) \wedge \neg p(a) \\ | \\ \neg (\exists y\, (p(a) \wedge \neg p(y))) \;,\quad p(a) \;,\quad \neg p(a) \end{array}$$

- ☐ A. il tableau è chiuso e quindi F è valida
- ☐ B. il tableau contiene un errore nel secondo passaggio ma F è valida
- ■ C. il tableau contiene un errore nel secondo passaggio e F non è valida
- ☐ D. il tableau di F è chiuso e pertanto il tableau dato deve contenere un errore
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

3. L'enunciato: $[A \vee (A \wedge \neg A) \vee (\neg A)] \wedge [(\neg A) \vee (\neg B) \vee C \vee B] \wedge \{\neg[D \wedge (\neg D)]\} \wedge [\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)]$:

- ☐ A. È vero soltanto se A, B, C, D sono tutti veri.
- ■ B. È una tautologia.
- ☐ C. È insoddisfacibile.
- ☐ D. È vero soltanto se A, D sono veri e B, C sono falsi.
- ☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

4. La formula $P(a) \rightarrow \forall x\, Q(x)$ è logicamente equivalente a

- ■ A. $\exists y\, \neg Q(y) \rightarrow \neg P(a)$
- ☐ B. $\exists y Q(y) \rightarrow \exists z\, P(z)$
- ☐ C. $\forall x\, Q(x) \rightarrow P(a)$
- ☐ D. $\exists z\, P(z) \rightarrow \forall x\, Q(x)$
- ☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

5. Qual'è la corretta formalizzazione della seguente espressione "P indipendentemente da Q"?

- ☐ A. $P \rightarrow Q$
- ☐ B. $(Q \vee P) \rightarrow Q$
- ☐ C. $\neg Q \rightarrow P$.
- ■ D. $(Q \vee \neg Q) \rightarrow P$.
- ☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

6. Può una formula con variabili libere essere valida?

- ☐ A. No.
- ☐ B. Sì, purché una sola variabile sia libera.
- ☐ C. No, a meno che tutte le occorrenze delle variabili siano libere.
- ■ D. Sì, se è una tautologia del calcolo proposizionale.
- ☐ E. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

7. Dimostrare, usando il sistema di Hilbert che la formula proposizionale $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$ è valida.