Università di Roma „La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Corso di Logica Matematica (A-D)

(Ciascuno dei quesiti seguenti ha una ed una sola risposta giusta; le risposte corrette sono marcate in rosso)

1. Sia $T \subseteq \mathbf{N}$. Allora
- ☐ A. Se $\mathbf{N}$-T = Ø allora T è finito.
- ☐ B. Se $0 \notin T$ allora non si possono dimostrare proprietà su T usando l'induzione
- ☐ C. Se $T \cap S \neq \emptyset$ allora $S \subseteq \mathbf{N}$.
- ☐ D. Se T è l'insieme dei pari allora non si possono dimostrare proprietà su T usando l'induzione
- ■ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

2. Siano f: A→B e g: B→C funzioni. Allora
- ☐ A. $g \circ f$ non è in ogni caso una funzione da A a C.
- ■ B. se f e g sono funzioni iniettive, anche $g \circ f$ è una funzione iniettiva.
- ☐ C. $g \circ f$ è definita se e soltanto se f è suriettiva.
- ☐ D. se g è una funzione suriettiva, anche $g \circ f$ è necessariamente una funzione suriettiva.
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

3. Sia R= {(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)} una relazione sui numeri naturali. R è:
- ☐ A. Una relazione di equivalenza.
- ■ B. Simmetrica e transitiva, ma non riflessiva.
- ☐ C. Antisimmetrica.
- ☐ D. Di ordine stretto.
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

4. Sia f: A→A una funzione. Allora:
- ☐ A. f è un ordine stretto su A.
- ☐ B. se f è una biiezione, allora non può godere della proprietà riflessiva.
- ■ C. f può godere della proprietà transitiva.
- ☐ D. f non può godere della proprietà simmetrica.
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

5. Sia J l'insieme dei segmenti del piano. La relazione $R \subseteq J \times J$ è così definita: (x; y) appartiene a R se e solo se i segmenti x, y appartengono alla stessa retta.
- ■ A. R gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, ma non della proprietà transitiva.
- ☐ B. R gode delle proprietà riflessiva, transitiva, ma non della proprietà simmetrica.
- ☐ C. R gode delle proprietà riflessiva, transitiva, ma non della proprietà antisimmetrica.
- ☐ D. R è una relazione d'ordine stretto.
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

6. Sia A un insieme ed A^c il suo complemento rispetto ad un fissato insieme universo. Quale delle seguenti uguaglianze NON vale?
- ■ A. $(A-A^c)-A = A-(A^c-A)$
- ☐ B. $(A \cap A^c) \cap A = A \cap (A^c \cap A)$
- ☐ C. $A \cup (A^c \cap A) = A$
- ☐ D. $(A^c \cap A^c) \cap A = \emptyset$
- ☐ E. $(A-A^c) \cup A = A \cap (A^c \cup A)$

7. Sia F: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ la funzione così definita: F(0)=1, F(1)=2, F(n+2) = F(n+1) +3F(n)
Si dimostri che $F(n) \geq 2^n$ per ogni n.

Soluzione: Dimostrazione per induzione:
- Due casi base:
  a. $F(0) = 1 \geq 2^0 = 1$
  b. $F(1) = 2 \geq 2^1 = 2$
- Induzione (vero fino a n+1, da dimostrare per n+2):
  $F(n+2) = F(n+1) + 3F(n) \geq 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n \geq 2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$

Università di Roma „La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Corso di Logica Matematica (A-D)

(Ciascuno dei quesiti seguenti ha una ed una sola risposta giusta; le risposte corrette sono marcate in rosso)

1. L'intersezione di due insiemi è uguale all'unione degli stessi insiemi. Allora:
- ☐ A. Entrambi gli insiemi considerati devono avere un solo elemento.
- ☐ B. Almeno uno di tali insiemi è certamente vuoto.
- ☐ C. Gli insiemi considerati devono essere disgiunti.
- ☐ D. Non esistono due insiemi tali che la loro intersezione sia uguale alla loro unione.
- ■ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

2. Sia I l'insieme degli intervalli di numeri reali del tipo $\{z\in \mathbf{R}: -\alpha<z<\alpha \text{ e } \alpha\in \mathbf{R}^+\}$, essendo $\mathbf{R}^+$ l'insieme dei numeri reali (strettamente) positivi. La relazione $S\subseteq I\times I$ è così definita: (x; y) appartiene a S se e solo se x intersezione y *è non vuoto*.
- ■ A. S è una relazione di equivalenza.
- ☐ B. S è una relazione simmetrica.
- ☐ C. S è una relazione di ordine largo.
- ☐ D. S è una relazione di ordine stretto.
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

3. La relazione che ad ogni numero naturale n associa n^2-1 è:
- ☐ A. Una relazione che non rispetta la definizione di funzione $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$.
- ☐ B. Una funzione iniettiva $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$.
- ☐ C. Una funzione suriettiva $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$.
- ■ D. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

4. Sia S la relazione di cui al n. 2, la sua chiusura transitiva:
- ☐ A. è Ø.
- ☐ B. è data da tutte le coppie di segmenti uguali tra loro.
- ☐ C. è la relazione totale.
- ☐ D. Non esiste.
- ■ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

5. Sia $A \subseteq \mathbf{Z}$. Allora
- ☐ A. A e **Z** sono equipotenti.
- ☐ B. **Z** -A è finito se e soltanto se A e **Z** sono equipotenti..
- ■ C. A e Z sono equipotenti sse sono entrambi equipotenti ad un dato insieme B.
- ☐ D. Se A e Z sono equipotenti allora **Z** -A e **Z** non possono essere equipotenti.
- ☐ E. Nessuna delle risposte precedenti è esatta.

6. Quanto vale $X \cap \{X\}$?
- ☐ A. X.
- ☐ B. {X}.
- ☐ C. Ø.
- ■ D. Non si può dire.

7. Sia F: $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$ la funzione così definita:
F(0)=1, F(1)=2, F(n+2) = F(n+1) +3F(n)
Si dimostri che $F(n) \geq 2^n$ per ogni n.

Soluzione: vedi compito precedente