

- secondo esonero (solo ultimi esercizi 4, 5 e 6; 1 ora di tempo)
- scritto completo (tutti gli esercizi, 2 ore di tempo)

**LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**  
**9 – II – 2007 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  una funzione e sia  $A_f = \{A_i : i \in \text{Imm}(f)\}$ , dove  $A_i = \{x \in \mathbf{N} : f(x) = i\}$ . Cioè  $A_f$  è la famiglia dei sottinsiemi di  $\mathbf{N}$  costituiti da elementi che hanno la stessa immagine mediante  $f$ . Si ricordi che una partizione è una famiglia di sottinsiemi non vuoti a intersezione vuota e con unione uguale all'intero insieme. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- A.  $A_f$  è una partizione di  $\mathbf{N}$
- B.  $A_f$  è un insieme finito o numerabile
- C. se  $f$  è iniettiva, allora  $|A_i| = 1$  per ogni  $A_i \in A_f$

Si definisca ora  $A_f = \{A_i : i \in \mathbf{N}\}$  e si assuma che  $f$  non sia suriettiva. Quali delle precedenti risposte è vera?

- A
- B
- C

2. Sia  $R$  una relazione transitiva e sia  $R^*$  la sua chiusura transitiva. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

- A.  $R = R^*$
- B.  $|R^*| > |R|$
- C.  $|R^*| \geq |R|$

3. Si dimostri per induzione che  $\sum_{k=1 \dots n} 1/\sqrt{k} > \sqrt{n}$ . Qual è il minimo caso base ammissibile?

+++++  
 4. Verificare con le tavole di verità e con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è valida

$$(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$$

5. Sia data la formula  $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \neg P(x,y))$ . Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa.

- A.  $(\mathbf{N}, \leq)$
- B.  $(\mathbf{N}, /)$
- C. la formula non ha un modello sostanzialmente diverso da quelli elencati
- D.  $(I, I \times I)$
- E.  $(I, \emptyset)$

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow Q(y))$$

- secondo esonero (solo ultimi esercizi 4, 5 e 6; 1 ora di tempo)
- scritto completo (tutti gli esercizi, 2 ore di tempo)

**LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**

**9 – II – 2007 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  una funzione non sia suriettiva e sia  $\mathbf{A}_f = \{A_i : i \in \mathbf{N}\}$ , dove  $A_i = \{x \in \mathbf{N} : f(x) = i\}$ . Cioè  $\mathbf{A}_f$  è la famiglia dei sottinsiemi di  $\mathbf{N}$  costituiti da elementi che hanno la stessa immagine mediante  $f$ .

Si ricordi che una partizione è una famiglia di sottinsiemi non vuoti a intersezione vuota e con unione uguale all'intero insieme. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- A.  $\mathbf{A}_f$  è una partizione di  $\mathbf{N}$
- B.  $\mathbf{A}_f$  è un insieme necessariamente numerabile
- C. se  $f$  è iniettiva, allora  $|A_i| = 1$  per ogni  $A_i \in \mathbf{A}_f$

Si definisca ora  $\mathbf{A}_f = \{A_i : i \in \text{Imm}(f)\}$ . Quali delle precedenti risposte è vera?

- A
- B
- C

2. Sia  $R$  una relazione transitiva e sia  $R^*$  la sua chiusura simmetrica. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

- A.  $R = R^*$
- B.  $|R^*| > |R|$
- C.  $|R^*| \geq |R|$

3. Si dimostri per induzione che  $\sum_{k=1..n} 1/\sqrt{k} > \sqrt{n}$ . Qual è il minimo caso base ammissibile?

+++++

4. Verificare con le tavole di verità e con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula non è soddisfacibile (si apprezza un ragionamento breve)

$$(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

5. Sia data la formula  $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(x,y))$ . Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa.

- A  $(\mathbf{N}, \leq)$
- B  $(\mathbf{N}, /)$
- C la formula non ha un modello sostanzialmente diverso da quelli elencati
- D  $(I, I \times I)$
- E  $(I, \emptyset)$

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow Q(y))$$

## SOLUZIONI

### FILA A:

1. 1<sup>a</sup> parte: crocette su A, B e C; 2<sup>a</sup> parte: crocetta solo su B
2. crocette su A e C
4. Costruire il tableaux della negata e vedere che ogni ramo si chiude.
5. Crocette su C ed E

### FILA B:

1. 1<sup>a</sup> parte: nessuna crocetta; 2<sup>a</sup> parte: crocette su A e C
2. crocetta su C
4. Costruire il tableaux della formula e osservare che il sottoalbero destro non si può chiudere.
5. Crocette su A, B, D ed E

## INDUZIONE

Il minimo caso base è 2; in tal caso abbiamo che  $1 + 1/\sqrt{2} > \sqrt{2}$ . Infatti

$$\sqrt{2} > 1, \text{ da cui } \sqrt{2} + 1 > 2, \text{ da cui } (\sqrt{2} + 1)/\sqrt{2} > 2/\sqrt{2}, \text{ cioè } 1 + 1/\sqrt{2} > \sqrt{2}$$

Per il passo induttivo, si assuma la tesi vera fino a  $n (> 1)$  e la si dimostri per  $n+1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1 \dots n+1} 1/\sqrt{i} &= \sum_{i=1 \dots n} 1/\sqrt{i} + 1/\sqrt{n+1} > \sqrt{n} + 1/\sqrt{n+1} = (\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1)/\sqrt{n+1} \\ &= (\sqrt{(n^2+n)} + 1)/\sqrt{n+1} > (\sqrt{n^2} + 1)/\sqrt{n+1} = (n+1)/\sqrt{n+1} = \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

## HILBERT

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (P(a) \rightarrow Q(y))$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$P(a) \rightarrow Q(y)$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\neg Q(y) \rightarrow \neg P(a)$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\forall x (\neg Q(y) \rightarrow \neg P(x))$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\forall x (\neg Q(y) \rightarrow \neg P(x)) \rightarrow (\neg Q(y) \rightarrow \forall x \neg P(x))$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\neg Q(y) \rightarrow \forall x \neg P(x)$
$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$	-	$\neg \forall x \neg P(x) \rightarrow Q(y)$
	-	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\neg \forall x \neg P(x) \rightarrow Q(y))$
	-	$\forall x (P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow Q(y))$