Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Prova, a.a. 2006/07 – FILA A

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,\{b\},\{b,c\}\}$ e $C = \boldsymbol{P}(A)$, cioè l'insieme delle parti di A.
Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \cap C = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$A \in C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$B \setminus C = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$b \in B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$a \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
F.	$B \setminus C \in C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \cap B = \emptyset$. Allora

A.	A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se B = Ø, allora A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
F.	se B = Ø, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
G.	se B = Ø, allora A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
H.	se B = Ø, allora A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei poligoni del piano, si dica se è un'equivalenza e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia poligoni con un lato in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:______________________________________

B. la relazione che accoppia poligoni con un lato parallelo
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:______________________________________

C. la relazione che accoppia poligoni con almeno un angolo di stessa ampiezza
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:______________________________________

D. Le risposte precedenti cambierebbero considerando le restrizioni delle relazioni ai soli quadrati?
☐ a. no
☐ b. sì; in particolare ____
(si elenchino le differenze)

4. Sia R una relazione binaria. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se R è un'equivalenza, allora la sua chiusura transitiva coincide con R	☐ Vero	☐ Falso
B.	se la sua chiusura transitiva coincide con R, allora R è un'equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
C.	se R è riflessiva e simmetrica, allora la sua chiusura transitiva è un'equivalenza	☐ Vero	☐ Falso
D.	se la sua chiusura transitiva è un'equivalenza, allora R è riflessiva e simmetrica	☐ Vero	☐ Falso
E.	se R è finita, allora la sua chiusura transitiva è finita	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f e g funzioni parziali e $g \circ f$ la loro composta. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se f e g sono totali, allora il dominio di $g \circ f$ coincide con il dominio di f	☐ Vero	☐ Falso
B.	se il dominio di $g \circ f$ coincide con il dominio di f, allora f e g sono totali	☐ Vero	☐ Falso
C.	$g \circ f$ esiste soltanto se f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $g \circ f$ è l'identità sul dominio di f, allora g è l'inversa di f	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri per induzione che $2^n + 3^n + 5^n \leq 10^n$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbf{N}$ che soddisfa questa proprietà.

SOLUZIONI:

1. risposte vere: A, B, E, F

2. risposte vere: B, C, F, G

3. crocette su: A.b (manca transitività), B.b (manca transitività), C.a, D.b (la relazione B è un'equivalenza)

4. risposte vere: A, C, E

5. risposte vere: A

6. Il minimo caso base è per n = 1: $2^1 + 3^1 + 5^1 = 10 = 10^1$
   Per il passo induttivo, si osservi che

$$2^{n+1} + 3^{n+1} + 5^{n+1} = 2\ 2^n + 3\ 3^n + 5\ 5^n \leq 10\ 2^n + 10\ 3^n + 10\ 5^n = 10\ (2^n + 3^n + 5^n) \leq 10\ 10^n = 10^{n+1}$$

Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Esonero, a.a. 2006/07 – FILA B

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {x,y,z}, B = {Ø,{z},{x,y}} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$B \cap C = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{x\} \in A \cap B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$A \cap C = A$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$B \subset C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\emptyset \in A \cup B$	☐ Vero	☐ Falso
F.	$A \in B$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \times B = \emptyset$. Allora

A.	A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se B = Ø, allora A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
F.	se B = Ø, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
G.	se B = Ø, allora A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
H.	se B = Ø, allora A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'insieme delle rette del piano, si dica se è un'equivalenza e, in caso positivo, si descriva l'insieme quoziente:

A. la relazione che accoppia rette parallele
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_______________________________________

B. la relazione che accoppia rette perpendicolari
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_______________________________________

C. la relazione che accoppia rette con un punto in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_______________________________________

D. la relazione che accoppia rette con due punti in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_______________________________________

4. Sia $R \subseteq I \times I$ una relazione binaria ed $\underline{R}$ la sua chiusura transitiva. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$R = \underline{R}$ sempre	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\underline{R}$ è infinita se R è infinita	☐ Vero	☐ Falso
C.	$\underline{R}$ può essere vuota	☐ Vero	☐ Falso
D.	la chiusura transitiva di $\underline{R}$ contiene propriamente $\underline{R}$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\underline{R}$ è un ordine se R è un ordine	☐ Vero	☐ Falso

5. Sia f una funzione biiettiva il cui dominio e codominio coincidono (diciamo sia l'insieme A). Allora

A.	f deve essere l'identità	☐ Vero	☐ Falso
B.	A deve avere un numero finito di elementi	☐ Vero	☐ Falso
C.	f può essere composta con se stessa un numero arbitrario di volte	☐ Vero	☐ Falso
D.	A non può essere l'insieme vuoto	☐ Vero	☐ Falso

6. Sia **L** l'insieme di successioni finite (parole) di simboli presi dall'insieme A= {0,1}, così definito:
- la parola vuota $\varepsilon \in$ **L**
- se $w \in$ **L** allora $0w1 \in$ **L**

Si dimostri per induzione che le parole in **L** hanno tutte lunghezza pari, diciamo 2n,ed i primi n simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1.

SOLUZIONI:

1. risposte vere: D, E

2. risposte vere: B, C, F, G

3. crocette su: A.a, A,b (le direzioni); D.a, D.b (tutte le rette)

4. risposte vere: B, C, E

5. risposte vere: C

6. Il caso base è dato per per n = 0: la parola ε soddisfa la condizione richiesta.
Se la proprietà è vera per la lunghezza k, vuol dire che esiste in **L** una sola parola *w* di lunghezza 2k, nella quale i primi k simboli sono 0 e gli altri tutti 1. Allora 0*w*1 sarà una parola di lunghezza 2(k+1) con i primi k simboli 0 e gli altri 1.

Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Esonero, a.a. 2006/07 – FILA C

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {x,y,w,z}, B = {x,{w},{y,z}} e C = ***P***(A), cioè l'insieme delle parti di A. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$A \in C \setminus B$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$B \setminus C = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$A \cap C = \emptyset$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$x \in B \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$B \setminus C \in C$	☐ Vero	☐ Falso
F.	$w \in B \cap C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che $A \cup B = \emptyset$. Allora

A.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se B = Ø, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
F.	se B = Ø, allora A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
G.	se B = Ø, allora A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
H.	se B = Ø, allora A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'universo dei poliedri dello spazio, si dica se è un'equivalenza e, in caso negativo, si elenchino tutte le proprietà che esse NON soddisfano:

A. la relazione che accoppia poliedri con uno spigolo in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:______________________________________

B. la relazione che accoppia poliedri con uno spigolo parallelo
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:______________________________________

C. la relazione che accoppia poliedri con almeno una faccia di stessa area
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. non è un'equivalenza perchè non gode della/e proprietà:______________________________________

D. Le risposte precedenti cambierebbero considerando le restrizioni delle relazioni ai soli cubi?
☐ a. no
☐ b. sì; in particolare ____
(si elenchino le differenze)

4. Sia R una relazione binaria. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se R è un'ordine, allora la sua chiusura transitiva coincide con R	☐ Vero	☐ Falso
B.	se la sua chiusura transitiva coincide con R, allora R è un'ordine	☐ Vero	☐ Falso
C.	se R è riflessiva e antisimmetrica, allora la sua chiusura transitiva è un'ordine	☐ Vero	☐ Falso
D.	se la sua chiusura transitiva è un'ordine, allora R è riflessiva e antisimmetrica	☐ Vero	☐ Falso
E.	se R è infinita, allora la sua chiusura transitiva è infinita	☐ Vero	☐ Falso

5. Siano f e g funzioni parziali e $g \circ f$ la loro composta. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	se il codominio di f coincide con il dominio di g, allora f e g sono totali	☐ Vero	☐ Falso
B.	$g \circ f$ esiste solo se f è suriettiva	☐ Vero	☐ Falso
C.	se f e g sono totali, allora il codominio di $g \circ f$ coincide con il codominio di g	☐ Vero	☐ Falso
D.	se $g \circ f$ è l'identità sul dominio di f, allora g è l'inversa di f	☐ Vero	☐ Falso

6. Si dimostri per induzione che $2^n + 3^n + 5^n \leq 10^n$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbf{N}$ che soddisfa questa proprietà.

SOLUZIONI:

1. risposte vere: A, C, D, E

2. risposte vere: A, D, E, H

3. crocette su: A.b (manca transitività), B.b (manca transitività), C.b (manca transitività),
D.b (C diventa equivalenza)

4. risposte vere: A, E

5. risposte vere: C

6. Il minimo caso base è per n = 1: $2^1 + 3^1 + 5^1 = 10 = 10^1$
Per il passo induttivo, si osservi che

$$2^{n+1} + 3^{n+1} + 5^{n+1} = 2\ 2^n + 3\ 3^n + 5\ 5^n \leq 10\ 2^n + 10\ 3^n + 10\ 5^n = 10\ (2^n + 3^n + 5^n) \leq 10\ 10^n = 10^{n+1}$$

Università di Roma "La Sapienza"
Corsi di Laurea in Informatica e Tecnologie Informatiche
Insegnamento di Logica Matematica, canale A-D
1° Esonero, a.a. 2006/07 – FILA D

Nome e Cognome ____ **Matricola** ______________

Anno di corso ______________

1. Si considerino i seguenti insiemi: A = {x,y,z}, B = {Ø,{z},{x,y}} e C = ***P***(B), cioè l'insieme delle parti di B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$B \cap C = Ø$	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\{x\} \subset A \cup B$	☐ Vero	☐ Falso
C.	$A \cap C = A$	☐ Vero	☐ Falso
D.	$B \in C$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$Ø \in A \cup C$	☐ Vero	☐ Falso
F.	$A \subset C$	☐ Vero	☐ Falso

2. Si supponga che A \ B = Ø. Allora

A.	A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
B.	A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
C.	A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
D.	A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
E.	se B = Ø, allora A può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
F.	se B = Ø, allora A non può essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
G.	se B = Ø, allora A può non essere Ø	☐ Vero	☐ Falso
H.	se B = Ø, allora A deve essere Ø	☐ Vero	☐ Falso

3. Per ognuna delle seguenti relazioni definite sull'insieme delle rette dello spazio, si dica se è un'equivalenza e, in caso positivo, si descriva l'insieme quoziente:

A. la relazione che accoppia rette parallele
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_____________________________________

B. la relazione che accoppia rette perpendicolari
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_____________________________________

C. la relazione che accoppia rette con un punto in comune
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_____________________________________

D. la relazione che accoppia rette sghembe
☐ a. è un'equivalenza
☐ b. l'insieme quoziente è:_____________________________________

4. Sia $R \subseteq I \times I$ una relazione binaria ed $\underline{R}$ la sua chiusura transitiva. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false.

A.	$R \neq \underline{R}$ sempre	☐ Vero	☐ Falso
B.	$\underline{R}$ è finita se R è finita	☐ Vero	☐ Falso
C.	$\underline{R}$ non può essere vuota	☐ Vero	☐ Falso
D.	la chiusura transitiva di $\underline{R}$ contiene propriamente $\underline{R}$	☐ Vero	☐ Falso
E.	$\underline{R}$ è un'equivalenza se R è un'equivalenza	☐ Vero	☐ Falso

5. Sia f una funzione biiettiva il cui dominio e codominio coincidono (diciamo sia l'insieme A). Allora

A.	f può non essere l'identità	☐ Vero	☐ Falso
B.	A non può avere un numero finito di elementi	☐ Vero	☐ Falso
C.	la funzione $f \circ f$ è definita	☐ Vero	☐ Falso
D.	A può essere l'insieme vuoto	☐ Vero	☐ Falso

6. Sia **L** l'insieme di successioni finite (parole) di simboli presi dall'insieme A= {0,1}, così definito:
- la parola vuota $\varepsilon \in$ **L**
- se $w \in$ **L** allora $0w1 \in$ **L**

Si dimostri per induzione che le parole in **L** hanno tutte lunghezza pari, diciamo 2n,ed i primi n simboli sono tutti 0 e gli altri tutti 1.

SOLUZIONI:

1. risposte vere: D, E

2. risposte vere: A, C, E, H

3. crocette su: A.a, A,b (le direzioni)

4. risposte vere: B, E

5. risposte vere: A, C, D

6. Il caso base è dato per per n = 0: la parola ε soddisfa la condizione richiesta.
Se la proprietà è vera per la lunghezza k, vuol dire che esiste in **L** una sola parola *w* di lunghezza 2k, nella quale i primi k simboli sono 0 e gli altri tutti 1. Allora 0*w*1 sarà una parola di lunghezza 2(k+1) con i primi k simboli 0 e gli altri 1.