Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

9 – I –2004 (prof. Anna Labella)

1. Sia R una relazione che gode delle proprietà simmetrica ed antisimmetrica. Allora
   A. R gode della proprietà riflessiva
   B. R è formata solo da coppie di elementi identici
   C. una tale relazione non può esistere
   D. R non contiene nessuna coppia
   E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Dimostrare per induzione sui naturali maggiori di 2 che, se n è divisibile per 2, allora $\sqrt{n} \geq 2$

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \vee \neg B))$$

4. Sia data la seguente proposizione:

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \; (p(z,y) \Rightarrow q(y,x))$$

   E' valida? E' contraddittoria? E' soddisfacibile? In quest'ultimo caso se ne dia un modello.

.

SOLUZIONI:

Domanda 1: risposta B

Domanda 2: basta applicare una induzione standard sull'insieme $\{4,6,8,10,\ldots\}$, oppure notare che gli n da considerare sono della forma $2m$ e procedere con una semplice induzione sugli m positivi.

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

A, A, B	$\vdash$	A
A, A	$\vdash$	$B \Rightarrow A$
A, A	$\vdash$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
A	$\vdash$	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$
	$\vdash$	$A \Rightarrow (A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B))$
	$\vdash$	$A \Rightarrow (A \Rightarrow (A \vee \neg B))$

Domanda 4: la formula data è soddisfacibile (infatti nè il suo tableaux nè il tableaux della sua negata si chiudono). Un possibile modello (in realtà piuttosto complesso) è il seguente:

L'universo sono i numeri reali

$p(z,y)$ è $z \geq y$

$q(y,x)$ è $|f(y) - l| < x$ dove f è una funzione reale che ammette limite l per $y \to \infty$ (per esempio $f(y) = {}^1/_y$ e $l = 0$)

In questo caso il predicato dato formalizza la definizione di limite finito quando la funzione tenda all'infinito.