Cognome ______________________________ **Nome**____________________

☐ secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)
☐ scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)

Esame del corso di **LOGICA MATEMATICA, Canale A – D** **FILA A**

30 – I – 2008 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia f: $A \rightarrow B$ una funzione iniettiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - ☐ A se A e B hanno la stessa cardinalità, allora f è suriettiva
   - ☐ B se A e B hanno entrambe n elementi, allora f è suriettiva
   - ☐ C se f è suriettiva, allora A e B hanno la stessa cardinalità
   - ☐ D se B = A, allora f è suriettiva
   - ☐ E se f è suriettiva, allora A = B

2. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 0$, $\Sigma_{k=0,\dots,n}\ k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

---

3. Dimostrare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è una tautologia

$$A \wedge B \rightarrow A$$

4. Sia data la formula $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \rightarrow \neg\, \forall x\, \forall y\, P(x,y)$. Provare con il metodo dei tableaux semantici che è soddisfacibile. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa?

   - ☐ A $D = \{a,b\}$, $|P| = \{(a,a), (b,b)\}$
   - ☐ B $D = \{a,b\}$, $|P| = D \times D$
   - ☐ C $D = \{a\}$, $|P| = \emptyset$
   - ☐ D $D = \{a\}$, $|P| = D \times D$

SOLUZIONI:

1. crocette su B e C

2. Passo base ($n = 0$): ovviamente $0 = 1! - 1$.
   Passo induttivo (vero fino a n, da dimostrare per n+1):

$$\Sigma_{k = 0,\ldots,n+1}\ k\,k! = (n+1)(n+1)! + \Sigma_{k = 0,\ldots,n}\ k\,k! = (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1 =$$

$$= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$$

3

$$\begin{array}{lll} \neg A, B & \vdash & \neg A \\ \neg A & \vdash & B \Rightarrow \neg A \\ \neg A & \vdash & A \Rightarrow \neg B \\ & \vdash & \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) \\ & \vdash & \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A \\ & \vdash & (A \wedge B) \Rightarrow A \end{array}$$

4 Fare il tableaux della formula; il primo passo è una beta-regola a seguito della quale si ottengono due nodi in cui non potrà mai comparire una formula e la sua negata; il tableaux è aperto e quindi la formula è soddisfacibile.

Crocette su A e C

Cognome ________________________________ **Nome**____________________

☐ secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)
☐ scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)

Esame del corso di **LOGICA MATEMATICA, Canale A – D** **FILA B**

30 – I – 2008 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. E' noto che il sottoinsieme dei reali [-1,1] è equipotente a [0,1]; quali delle seguenti funzioni è una biiezione che può essere usata per mostrare ciò?

☐ A la funzione modulo da [-1,1] a [0,1]
☐ B la funzione da [-1,1] a [0,1] che mappa ogni x negativo in f(x) e ogni altro x in g(x), dove f e g sono funzioni biiettive da [-1,0) in [0, ½) e da [0,1] in [½, 1]
☐ C la funzione da [-1,1] a [0,1] che mappa x in (x+1)/2
☐ D la funzione da [0,1] a [-1,1] che mappa x in 2x-1
☐ E la funzione da [0,1] a [-1,1] che mappa ogni $x \in [\varepsilon,1]$ in se stesso e ogni altro x in f(x), dove $\varepsilon > 0$ e f è una biiezione da $[0, \varepsilon)$ in $[-1, \varepsilon)$

2. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 0$, $n + n^2$ è un numero pari.

---

3. Dimostrare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è una tautologia

$$B \to A \vee B$$

4. Sia data la formula $\exists x\, \exists y\, \forall z\, Q(x,y,z) \to \exists x\, \forall y\, \forall z\, Q(x,y,z)$. Provare con il metodo dei tableaux semantici che è soddisfacibile. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa?

☐ A D = {numeri naturali}, |Q| = {(a,b,c) tali che a+b = c}
☐ B D = {numeri naturali}, |Q| = {(a,b,c) tali che a*b = c}
☐ C D = {a}, $|Q| = D \times D \times D$
☐ D D = {a,b}, |Q| = Ø

SOLUZIONI:

1. crocette su B, C, D, E

2. Passo base (n = 0): ovviamente $0 + 0^2 = 0$ è pari.
   Passo induttivo (vero fino a n, da dimostrare per n+1):

$$(n+1) + (n+1)^2 = n + 1 + n^2 + 2n + 1 = (n + n^2) + 2(n+1)$$

   Il primo addendo è pari per induzione; il secondo addendo è pari; la somma di numeri pari è un numero pari.

3

$$\begin{array}{ll} \vdash & B \to (\neg A \to B) \\ \vdash & B \to (A \vee B) \end{array}$$

4 Fare il tableaux della formula; il primo passo è una beta-regola a seguito della quale si ottengono due nodi in cui non potrà mai comparire una formula e la sua negata; il tableaux è aperto e quindi la formula è soddisfacibile.

Crocette su A, B, C e D.

Cognome ________________________________ **Nome**____________________

☐ secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)
☐ scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)

Esame del corso di **LOGICA MATEMATICA, Canale A – D** **FILA C**

30 – I – 2008 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia f: $A \to B$ una funzione suriettiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - ☐ A se A e B hanno entrambe n elementi, allora f è iniettiva
   - ☐ B se B = A, allora f è iniettiva
   - ☐ C se A e B hanno la stessa cardinalità, allora f è iniettiva
   - ☐ D se f è iniettiva, allora A = B
   - ☐ E se f è iniettiva, allora A e B hanno la stessa cardinalità

2. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 0$, $\Sigma_{k=0,\ldots,n}\ k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

---

3. Dimostrare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è una tautologia

$$A \wedge B \to B$$

4. Sia data la formula $\exists x\ \exists y\ P(x,y) \to \neg\ \forall x\ \forall y\ P(x,y)$. Provare con il metodo dei tableaux semantici che è soddisfacibile. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa?

   - ☐ A $D = \{a\}$, $|P| = \emptyset$
   - ☐ B $D = \{a,b\}$, $|P| = D \times D$
   - ☐ C $D = \{a\}$, $|P| = D \times D$
   - ☐ D $D = \{a,b\}$, $|P| = \{(a,b), (b,a)\}$

SOLUZIONI:

1. crocette su A e E

2. Passo base (n = 0): ovviamente $0 = 1! - 1$.
Passo induttivo (vero fino a n, da dimostrare per n+1):

$$\Sigma_{k = 0,\ldots,n+1}\ k\,k! = (n+1)(n+1)! + \Sigma_{k = 0,\ldots,n}\ k\,k! = (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1 =$$

$$= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$$

3

$\vdash \quad \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$

$\vdash \quad \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$

$\vdash \quad (A \wedge B) \Rightarrow B$

4 Fare il tableaux della formula; il primo passo è una beta-regola a seguito della quale si ottengono due nodi in cui non potrà mai comparire una formula e la sua negata; il tableaux è aperto e quindi la formula è soddisfacibile.

Crocette su A e D

3. Cognome ________________________________ Nome___________________

☐ secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4 ; tempo: 1 ora)
☐ scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)

Esame del corso di **LOGICA MATEMATICA, Canale A – D** **FILA D**

30 – I – 2008 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. E' noto che il sottoinsieme dei reali [0,1] è equipotente a [-1,1]; quali delle seguenti funzioni è una biiezione che può essere usata per mostrare ciò?

- ☐ A la funzione da [-1,1] a [0,1] che mappa x in (x+1)/2
- ☐ B la funzione da [0,1] a [-1,1] che mappa ogni $x \in [\varepsilon,1]$ in se stesso e ogni altro x in f(x), dove $\varepsilon > 0$ e f è una biiezione da $[0, \varepsilon)$ in $[-1, \varepsilon)$
- ☐ C la funzione da [-1,1] a [0,1] che mappa ogni x negativo in f(x) e ogni altro x in g(x), dove f e g sono funzioni biiettive da [-1,0) in [0, ½) e da [0,1] in [½, 1]
- ☐ D la funzione da [0,1] a [-1,1] che mappa x in 2x-1
- ☐ E la funzione modulo da [-1,1] a [0,1]

2. Provare per induzione che, per ogni $n \geq 0$, $n + n^2$ è un numero pari.

---

3. Dimostrare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è una tautologia

$$A \rightarrow A \vee B$$

4. Sia data la formula $\exists x\, \exists y\, \forall z\, Q(x,y,z) \rightarrow \exists x\, \forall y\, \forall z\, Q(x,y,z)$. Provare con il metodo dei tableaux semantici che è soddisfacibile. Quale delle seguenti interpretazioni è un modello per essa?

- ☐ A D = {rette del piano}, |Q| = {(a,b,c) tali che c interseca a o c interseca b}
- ☐ B D = { rette del piano }, |Q| = {(a,b,c) tali a, b e c sono parallele tra loro}
- ☐ C D = {a}, $|Q| = D \times D \times D$
- ☐ D D = {a}, |Q| = {(a,a,a)}

SOLUZIONI:

1. crocette su A, B, C, D

2. Passo base ($n = 0$): ovviamente $0 + 0^2 = 0$ è pari.
   Passo induttivo (vero fino a n, da dimostrare per n+1):

$$(n+1) + (n+1)^2 = n + 1 + n^2 + 2n + 1 = (n + n^2) + 2(n+1)$$

   Il primo addendo è pari per induzione; il secondo addendo è pari; la somma di numeri pari è un numero pari.

3

$$\begin{array}{lll} A, \neg B & \vdash & A \\ A & \vdash & \neg B \rightarrow A \\ A & \vdash & \neg A \rightarrow B \\ & \vdash & A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \\ & \vdash & A \rightarrow (A \vee B) \end{array}$$

4 Fare il tableaux della formula; il primo passo è una beta-regola a seguito della quale si ottengono due nodi in cui non potrà mai comparire una formula e la sua negata; il tableaux è aperto e quindi la formula è soddisfacibile.

Crocette su B, C e D.