Cognome ________________________________ Nome____________________

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – D
3 - 2 - 2011 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)
FILA A

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Sia $f: X \rightarrow X$ una biiezione, con $X \neq \emptyset$; si definisca $\ker(f) = \{(x,x') \mid x,x' \in X \wedge f(x) = f(x')\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?

☐ A. $X/_{\ker(f)}$ ha come classi insiemi singoletto

☐ B. $f = \ker(f)$

☐ C. $f = (X \times X) \setminus \ker(f)$

☐ D. $(X \times X) \cap \ker(f) = \ker(f)$

2. Sia $R = \{(X,Y) : X$ ha un sottoinsieme proprio equipotente a $Y\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?

☐ A. R è una relazione d'ordine stretto

☐ B. R è una relazione d'ordine largo

☐ C. $(\mathbf{Z},\mathbf{N}) \in R$

☐ D. $(\mathbf{Z},\mathbf{R}) \in R$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di **N** per cui vale $n^2 \leq 2^{n-1}$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n.

4. Si dimostri che il seguente enunciato è soddisfacibile usando il metodo dei tableau e si indichi un'interpretazione che sia un modello:

$$(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow \neg p))$$

5. Si dimostri che la seguente formula è una tautologia usando il metodo di Hilbert:

$$(\forall x \forall y\, P(x,y) \;\vee\; \forall y \forall x\, Q(y,x)) \rightarrow (P(a,b) \vee Q(a,b))$$

6. Si dica quali dei seguenti sono modelli per la formula:

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \;\rightarrow \forall y \forall x\, P(y,x)$$

- ☐ A. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "$x \leq y$";
- ☐ B il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "sia x che y sono non-negativi";
- ☐ C il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "$x > y$";
- ☐ D il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "$x = 2\, y$"

Cognome ________________________________ Nome____________________

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – D
3 - 2 - 2011 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)
FILA B

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Sia $f : A \to B$; si definisca $R = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B,\ f(a) \neq b\}$ e sia $R(a) = \{b : (a,b) \in R\}$. Quali delle seguenti affermazioni è sempre vera, indipendentemente dalla scelta di A e B?

☐ A. se f è iniettiva allora $R(a) \cap R(a') = \emptyset$ per $a \neq a'$

☐ B. R è una relazione d'equivalenza

☐ C. se f è suriettiva allora $\{b : \forall a.(a,b) \in R\} = \emptyset$

☐ D. se f è iniettiva allora $R(a) \neq R(a')$ per $a \neq a'$

2. Quali delle seguenti affermazioni è esatta?

☐ A. $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$ è equipotente a $\mathbf{R}_+$

☐ B. $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$ è equipotente a $\mathbf{N}$

☐ C. $\mathbf{N} \setminus \mathbf{R}_+$ è equipotente a $\mathbf{R}_+$

☐ D. $\mathbf{N} \setminus \mathbf{R}_+$ è equipotente a $\mathbf{N}$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di **N** per cui vale $2n + 1 \leq 2^{n-1}$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n.

4. Si dimostri che il seguente enunciato \`e soddisfacibile usando il metodo dei tableau e si indichi un'interpretazione che sia un modello:

$$((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg q)$$

5. Si dimostri che la seguente formula è una tautologia usando il metodo di Hilbert:

$$\forall y \forall x\, P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\, P(y,x)$$

6. Si dica quali dei seguenti non sono modelli per la formula:

$$(P(a,b) \vee Q(a,b)) \rightarrow (\forall x \forall y\, P(x,y) \vee \forall y \forall x\, Q(y,x))$$

- ☐ A. il dominio è **N**, |P(x,y)| = "x ≤y", |Q(x,y)| = "sia x che y sono non-negativi"
- ☐ B. il dominio è **N**, |P(x,y)| = "x >y", |Q(x,y)| = "sia x che y sono non-negativi"
- ☐ C. il dominio è **N**, |P(x,y)| = "sia x che y sono non-negativi", |Q(x,y)| = "x≤y"
- ☐ D. il dominio è **N**, |P(x,y)| = "sia x che y sono non-negativi", |Q(x,y)| = "x>y"

Cognome ________________________________ **Nome**____________________

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – D
3 - 2 - 2011 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)
FILA C

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Sia $f : X \rightarrow X$ una biiezione, con $X \neq \emptyset$; si definisca $\ker(f) = \{(x,x') \mid x,x' \in X \wedge f(x) = f(x')\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?

☐ A. $X/_{\ker(f)}$ ha un'unica classe di equivalenza
☐ B. $f \subseteq \ker(f)$
☐ C. $f \subseteq (X\times X) \setminus \ker(f)$
☐ D. $(X\times X) \cap \ker(f) \subseteq \ker(f)$

2. Sia $R = \{(X,Y) : X$ ha un sovrainsieme proprio equipotente a $Y\}$. Quali delle seguenti risposte è esatta?

☐ A. R è una relazione d'ordine stretto
☐ B. R è una relazione d'ordine largo
☐ C. $(\mathbf{Z},\mathbf{N}) \in R$
☐ D. $(\mathbf{Z},\mathbf{R}) \in R$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di **N** per cui vale $n^2 \leq 2^{n-1}$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n.

4. Si dimostri che il seguente enunciato è soddisfacibile usando il metodo dei tableau e si indichi un'interpretazione che sia un modello:

$$(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow \neg p))$$

5. Si dimostri che la seguente formula è una tautologia usando il metodo di Hilbert:

$$(\forall x \forall y\, P(x,y) \lor \forall y \forall x\, Q(y,x)) \rightarrow (P(a,b) \lor Q(a,b))$$

6. Si dica quali dei seguenti sono modelli per la formula:

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \rightarrow \forall y \forall x\, P(y,x)$$

- ☐ A. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "sia x che y sono non-negativi";
- ☐ B. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "$x \leq y$";
- ☐ C. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "$x = 2y$"
- ☐ D. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = "$x > y$";

Cognome ________________________________ **Nome**____________________

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – D
3 - 2 - 2011 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)
FILA D

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Sia $f : A \rightarrow B$; si definisca $R = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, f(a) \neq b\}$ e sia $R(a) = \{b : (a,b) \in R\}$. Quali delle seguenti affermazioni è sempre vera, indipendentemente dalla scelta di A e B?

- ☐ A. se f è iniettiva allora $R(a) \cap R(a') \neq \emptyset$ per $a \neq a'$
- ☐ B. R è una relazione d'ordine
- ☐ C. se f è suriettiva allora $\{b : \forall a.(a,b) \in R\} = B$
- ☐ D. se f è iniettiva allora $R(a) = R(a')$ per $a \neq a'$

2. Quali delle seguenti affermazioni è esatta?

- ☐ A. $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$ è equipotente a $\mathbf{R}$
- ☐ B. $\mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$ è equipotente a $\mathbf{Z}$
- ☐ C. $\mathbf{N} \setminus \mathbf{R}_+$ è equipotente a $\emptyset$
- ☐ D. $\mathbf{N} \setminus \mathbf{R}_+$ è equipotente a $\mathbf{Q}$

3. Qual è il più grande sottoinsieme di **N** per cui vale $2n + 1 \leq 2^{n-1}$? Si giustifichi la risposta con un procedimento induttivo su n.

4. Si dimostri che il seguente enunciato \`e soddisfacibile usando il metodo dei tableau e si indichi un'interpretazione che sia un modello:

$$((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \;\rightarrow\; (q \rightarrow \neg q)$$

5. Si dimostri che la seguente formula è una tautologia usando il metodo di Hilbert:

$$\forall y \forall x\, P(x,y) \;\rightarrow\; \forall x \exists y\, P(y,x)$$

6. Si dica quali dei seguenti non sono modelli per la formula:

$$(P(a,b) \vee Q(a,b)) \rightarrow (\forall x \forall y\, P(x,y) \vee \forall y \forall x\, Q(y,x))$$

- ☐ A. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = “sia x che y sono non-negativi”, $|Q(x,y)|$ = “$x \leq y$”
- ☐ B. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = “$x \leq y$”, $|Q(x,y)|$ = “sia x che y sono non-negativi”
- ☐ C. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = “sia x che y sono non-negativi”, $|Q(x,y)|$ = “$x > y$”
- ☐ D. il dominio è **N**, $|P(x,y)|$ = “$x > y$”, $|Q(x,y)|$ = “sia x che y sono non-negativi”

SOLUZIONI

1.
Fila A: Crocette su A e D
Fila B: Crocette su C e D
Fila C: Crocetta su D
Fila D: Crocetta su A

2.
Fila A: Crocette su A e C
Fila B: Crocetta su A
Fila C: Crocette su A, C, D
Fila D: Crocette su A e C

3.
File A e C:

Il più grande sottoinsieme è {0,1,7,8,9,…}. Per mostrare che la proprietà vale su 0, 1 e 7 si lavora in maniera diretta (sostituendo il numero a n e svolgendo i calcoli); in modo simile si dimostra che la proprietà non vale su 2,3,…,6. Per dimostrare che la proprietà vale su tutti i numeri maggiori di 7, si ragiona nel modo seguente:

- Si assume la tesi vera per n
- $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + n^2 \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n = 2^{(n+1)-1}$
  dove il secondo passaggio vale perché $2n+1 \leq n^2$, per ogni $n \geq 1 + \sqrt{2}$

File B e D:

Il più grande sottoinsieme è {5,6,7,8,9,…}. Per mostrare che la proprietà non vale su 0,1,..,4 si lavora in maniera diretta (sostituendo il numero a n e svolgendo i calcoli). Per dimostrare che la proprietà vale su tutti i numeri maggiori di 4, si ragiona nel modo seguente:

- $2^{5-1} = 16 \geq 2\cdot 5 + 1 = 11$
- Si assume la tesi vera per n
- $2^{(n+1)-1} = 2^n = 2\cdot 2^{n-1} \geq 2\cdot(2n+1) = 4n + 2 \geq 2n + 3 = 2(n+1) + 1$
  dove il quinto passaggio vale perché $2n+3 \leq 4n+2$, per ogni $n \geq 1/2$

4.
File A e C:
Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto con un ramo etichettato $\neg$ p.
Esempio di modello v(p) = F

File B e D:
Si costruisca il tableau per la formula data e si noti che resta aperto con un ramo etichettato $\neg$ q.
Esempio di modello v(q) = F

5. Suggerimento: usare come teoremi le formule della Proposizione 9.1.

File A e C:

$\vdash \forall x\, \forall y\, (P(x,y) \vee Q(x,y)) \to (P(a,b) \vee Q(a,b))$	Ax. 4 (due volte)
$\vdash (\forall x \forall y\, P(x,y) \vee \forall x \forall y\, Q(x,y)) \to \forall x\, \forall y\, (P(x,y) \vee Q(x,y))$	v. Prop 9.1 (9) (due volte)
$\vdash (\forall x \forall y\, P(x,y) \vee \forall x \forall y\, Q(x,y)) \to (P(a,b) \vee Q(a,b))$	Transitività
$\vdash (\forall x \forall y\, P(x,y) \vee \forall y \forall x\, Q(y,x)) \to (P(a,b) \vee Q(a,b))$	Ridenominazione delle variabili vincolate

File B e D:

$\vdash$ $\forall x\, P(x,a) \to \exists x P(x,a)$ — v. Prop 9.1 (3)

$\vdash$ $\forall y\, (\forall x\, P(x,y) \to \exists x P(x,y))$ — Gen.

$\vdash$ $\forall y\, (\forall x\, P(x,y) \to \exists x P(x,y)) \to (\forall y \forall x\, P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y))$ — v. Prop 9.1 (21)

$\vdash$ $\forall y \forall x\, P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$ — MP

$\vdash$ $\forall y \forall x\, P(x,y) \to \forall x \exists y\, P(y,x)$ — Ridenominazione delle variabili vincolate

6.
Fila A: Crocette su B, C e D
Fila B: Nessuna crocetta
Fila C: Crocetta su A, C e D
Fila D: Nessuna crocetta