**Esame del corso di**

**LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**

**28-1-2004 (prof. Anna Labella)**

1. Sia T un insieme numerabile e sia $f$ una funzione da T a T. Allora
   A. $f$ è un insieme numerabile
   B. $f$ deve essere iniettiva
   C. $f$ non può essere biiezione
   D. Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Sia F una funzione definita come

$$F(0) = 1$$
$$F(1) = 3$$
$$F(n+2) = F(n) + F(n+1)$$

   Si dia $\boldsymbol{S}$ , il più grande sottinsieme di **N** tale che $\forall\ n \in \boldsymbol{S}$ . $F(n) \geq 3n^2$. Si dimostri la correttezza della risposta data.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$( B \wedge \neg A ) \rightarrow ( \neg C \rightarrow \neg( A \vee C ) )$$

4. Sia data la seguente proposizione:

$$\forall x\ \forall y\ ( p(x,y) \Rightarrow \exists z\ q(x,y,z) )$$

   Si dica se è soddisfacibile ed in caso affermativo se ne dia un modello.

.

**SOLUZIONI:**

Domanda 1: risposta A

Domanda 2: L'insieme ***S*** è $\{0,1,12,13,14,...\}$. Questo si può dimostrare nella maniera seguente:

1. Per n = 0 e n = 1: banale
2. bisogna dimostrare che in $\{2,3,4,5,...,11\}$ la proprietà non vale. (banale)
3. Per induzione si deve mostrare che per $n > 11$ vale

    Base (n = 11,12): OK

    Induzione: $F(n+2) = F(n) + F(n+1) \geq 3n^2 + 3(n+1)^2 = 3(2n^2 + 2n +1) \geq 3(n+2)^2$

        N.B.: l'ultima disuguaglianza vale per ogni $n \geq 3$

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$$
\begin{array}{lll}
\neg(B \to A) , \neg A \to C & \vdash & A \to (B \to A) \\
\neg(B \to A) , \neg A \to C & \vdash & \neg(B \to A) \to \neg A \\
\neg(B \to A) , \neg A \to C & \vdash & \neg(B \to A) \\
\neg(B \to A) , \neg A \to C & \vdash & \neg A \\
\neg(B \to A) , \neg A \to C & \vdash & \neg A \to C \\
\neg(B \to A) , \neg A \to C & \vdash & C \\
\neg(B \to A) & \vdash & (\neg A \to C ) \to C \\
\neg(B \to A) & \vdash & \neg C \to \neg( \neg A \to C ) \\
 & \vdash & \neg( B \to A) \to ( \neg C \to \neg( \neg A \to C ) ) \\
 & \vdash & ( B \wedge \neg A ) \to ( \neg C \to \neg( A \vee C ) )
\end{array}
$$

Domanda 4: la formula data è soddisfacibile (il tableaux con alla radice la formula data non si chiude). Un possibile modello è il seguente:

L'universo sono i numeri reali

$p(x,y)$ è $x > y \wedge x \in \mathbf{Q} \wedge y \in \mathbf{Q}$

$q(x,y,z)$ è $x > z \geq y$

L'idea è che la formula esprime la ben nota proprietà che tra due razionali esiste sempre un reale.

**Esame del corso di**

**LOGICA MATEMATICA - Canale A – D**

**28 – I –2004 (prof. Anna Labella)**

1. Sia $f: A \to B$ una funzione suriettiva tra insiemi finiti. Allora
   A. non esiste alcuna una funzione $f'$: $B \to A$ tale che $f \cdot f'$: $B \to B$ sia l'identità
   B. esiste esattamente una funzione $f'$: $B \to A$ tale che $f \cdot f'$: $B \to B$ sia l'identità
   C. esiste almeno una funzione $f'$: $B \to A$ tale che $f \cdot f'$: $B \to B$ sia l'identità
   D. Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Dimostrare per induzione sui naturali la proprietà associativa della somma.

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

4. Sia data la seguente proposizione:

$$\forall x\ \forall z\ \exists y\ (p(z,y) \wedge \neg p(y,x))$$

E' valida? E' contraddittoria? E' soddisfacibile? In quest'ultimo caso quanti elementi deve almeno avere un modello?

**SOLUZIONI:**

Domanda 1: risposta C

Domanda 2: Bisogna dimostrare che $k + (n + m) = (k + n) + m$ . Si proceda per induzione su k.

Base (0): $0+(n+m) = n+m = (0+n)+m$

Induzione (vero per k da dimostrare per k+1):

$succ(k) + (n+m) = succ(k + (n+m)) = succ((k+n)+m) = succ(k+n) + m = (succ(k) + n) + m$

Domanda 3: Tutti i metodi sono standard, tranne Hilbert

| | | |
|---|---|---|
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) , B , A \}$ | \|- | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ |
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) , B , A \}$ | \|- | $A$ |
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) , B , A \}$ | \|- | $B \rightarrow C$ |
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) , B , A \}$ | \|- | $B$ |
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) , B , A \}$ | \|- | $C$ |
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) , B \}$ | \|- | $A \rightarrow C$ |
| $\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) \}$ | \|- | $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ |
| $\{ \}$ | \|- | $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ |

Domanda 4: La formula è soddisfacibile ma ogni modello deve avere almeno un'infinità numerabile di elementi. Infatti la formula data esprime la proprietà di un ordine denso, cioè che tra due numeri dati ne esiste sempre uno tra essi compreso. Com'è ben noto, questo avviene solo dai razionali in su.