Cognome ________________________________

Nome____________________Anno di corso____

Esame del corso di
LOGICA MATEMATICA - Canale A – D
22 – II – 2006 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione sui reali. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - ☐ A. f, vista come insieme di coppie $(x, f(x))$, è equipotente a **R**
   - ☐ B. se f è biiettiva non è numerabile
   - ☐ C. se l'immagine di f è **Q** allora f è numerabile
   - ☐ D. la restrizione di f a **N** è un insieme non numerabile
   - ☐ E. Nessuna delle precedenti è vera

2. Provare per induzione che, se $a \neq 1$, allora, per ogni $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, si ha che

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i} = a \, \frac{1 - a^{n}}{1 - a}$$

3. Sia data la formula $\exists x(\forall y \neg P(x.y) \Rightarrow P(x,x))$. Quale delle seguenti strutture è un modello per essa?
   - ☐ A. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n < m\}$.
   - ☐ B. D = **un qualunque insieme** , $|P|$ = una relazione simmetrica e transitiva.
   - ☐ C. D = insieme delle rette del piano , $|P| = \{(r,r') \mid r$ è distinta da $r'\}$.
   - ☐ D. $D = \mathbf{N}$, $|P| = \{(n,m) \mid n = 2m\}$

4. Mostrare, usando il metodo di Hilbert, che la seguente espressione è un teorema:

$$((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

5. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) che la seguente formula è valida:

$$\forall x \, \exists y \, (P(x, y) \vee Q(x, y)) \rightarrow \forall x \, (\exists y \, (P(x, y) \vee \exists z \, Q(x, z))$$

SOLUZIONI:

1. le crocette andavano messe sulle lettere A e B

2. La dimostrazione è per induzione su n.
   Il passo base (n = 1) è ovvio: $a^1 = a$.
   Per il passo induttivo, si ha che

$$\sum_{i=1}^{n+1} a^i = \sum_{i=1}^{n} a^i + a^{n+1} = a \frac{1-a^n}{1-a} + a^{n+1} = \frac{a - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1-a} = a\frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

3. nessuna crocetta: la formula non ha modelli.

4.

$$\begin{array}{lll}
(A \to B) \to C , A , B & \vdash & B \to (A \to B) \\
(A \to B) \to C , A , B & \vdash & B \\
(A \to B) \to C , A , B & \vdash & A \to B \\
(A \to B) \to C , A , B & \vdash & (A \to B) \to C \\
(A \to B) \to C , A , B & \vdash & C \\
(A \to B) \to C , A & \vdash & B \to C \\
(A \to B) \to C & \vdash & A \to (B \to C) \\
 & \vdash & ((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))
\end{array}$$

5. Bisognava svolgere il tableaux della negata. Inoltre, era strettamente necessario applicare una precisa strategia di costruzione del tableaux: bisognava prima istanziare tutti gli esistenziali e poi, con le costanti così introdotte, istanziare gli universali.