Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

19 – II –2004 (prof. Anna Labella)

1. Sia f una biiezione sui naturali. Allora
   A. f non può godere della proprietà antisimmetrica
   B. f deve godere della proprietà simmetrica
   C. f non può essere non simmetrica
   D. se f è simmetrica, allora f è l'unica inversa di f stessa
   E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Si esibisca un sottinsieme dei numeri naturali chiuso rispetto alla funzione successore (cioè $S = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$) tale che, per ogni $n \in S$, valga $2^n \geq an^2$, dove a è una costante maggiore o uguale a 10. Si dimostri la correttezza della risposta data. (N.B.: non è richiesto che l'insieme sia il più grande possibile)

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$(A \to ((B \to C) \to D)) \to (\neg(A \to D) \to (A \wedge B \wedge \neg C))$$

4. Si dica se la formula

$$\forall x\, \forall y\, .\, \varphi(x, y)$$

è soddisfacibile. In caso positivo, si forniscano tutti i modelli nei quali $\varphi(x, y)$ viene interpretato come $x = y$.

SOLUZIONI:

Domanda 1: risposta D

Domanda 2: L'insieme più semplice è $\{ a, a+1, a+2, ... \}$. Per dimostrarlo, andiamo per induzione su n.

Base: $2^a \geq a^3$. Infatti $2^{10} \geq 10^3$; inoltre, l'esponenziale è una funzione strettamente crescente e definitivamente maggiore di ogni funzione polinomiale. Questo basta per concludere $2^a \geq a^3$, per ogni $a \geq 10$.

Induzione: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2a\, n^2 \geq a\,(n+1)^2$. Infatti, come è facile verificare che, per ogni $n \geq 3$, si ha $2a\, n^2 \geq a\,(n+1)^2$. Ma se $n \in S$, allora $n \geq a \geq 10$.

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica *(N.B.: il fatto che ci siano tre operandi in una congiunzione/disgiunzione si può trattare in due modi: usando leggi associative oppure applicando l'ovvia regola per le operazioni a tre operandi, in cui invece di creare due rami se ne creano tre oppure si aggiungono tre termini al nuovo ramo invece che due)*. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$$
\begin{array}{lll}
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & (A \to ((B \to C) \to D)) \to \\
 & & \qquad ((A \to (B \to C)) \to (A \to D)) \\
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & A \to ((B \to C) \to D) \\
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & (A \to (B \to C)) \to (A \to D) \\
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & \neg(A \to D) \to \neg(A \to (B \to C)) \\
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & \neg(A \to D) \\
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & \neg(A \to (B \to C)) \\
A \to ((B \to C) \to D),\ \neg(A \to D) & \vdash & A \wedge B \wedge \neg C \\
A \to ((B \to C) \to D), & \vdash & \neg(A \to D) \to (A \wedge B \wedge \neg C) \\
 & \vdash & (A \to ((B \to C) \to D)) \to \\
 & & \qquad (\neg(A \to D) \to (A \wedge B \wedge \neg C))
\end{array}
$$

Domanda 4: φ è soddisfacibile. I modelli sono tutti e soli quelli il cui universo contiene un solo elemento.

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

19 – II –2004 (prof. Anna Labella)

1. Quante relazioni di equivalenza si possono definire su un insieme di tre elementi?
   A. 1
   B. 3
   C. 5
   D. 8
   E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta

2. Si esibisca un sottinsieme dei numeri naturali chiuso rispetto alla funzione successore (cioè S = {k, $k+1$, $k+2$, ...}) tale che, per ogni $n \in$ S, valga $2^n \geq an^2$, dove a è una costante maggiore o uguale a 10. Si dimostri la correttezza della risposta data. (N.B.: non è richiesto che l'insieme sia il più grande possibile)

3. Mostrare, usando tutti i metodi studiati nel corso, che la seguente espressione è una tautologia:

$$(\neg B \vee \neg A \vee C) \rightarrow ((\neg B \wedge A) \vee \neg A \vee C)$$

4. Si dica se la formula

$$\forall x\ \forall z\ \exists y\ P(x, y, z) \rightarrow \neg\forall x\ \exists y\ \forall z\ P(x, y, z)$$

è soddisfacibile. In caso positivo, si fornisca un modello.

SOLUZIONI:

Domanda 1: risposta C

Domanda 2: vedi soluzione del compito precedente

Domanda 3: tavole di verità, tableaux e Gentzen sono da costruire in maniera automatica *(N.B.: il fatto che ci siano tre operandi in una congiunzione/disgiunzione si può trattare in due modi: usando leggi associative oppure applicando l'ovvia regola per le operazioni a tre operandi, in cui invece di creare due rami se ne creano tre oppure si aggiungono tre termini al nuovo ramo invece che due)*. La dimostrazione in Hilbert è la seguente:

$$\begin{array}{ll}
\vdash & (A \to (B \to C)) \;\to\; ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\vdash & (A \to (B \to C)) \;\to\; ((\neg A \vee B) \to (A \to C)) \\
\vdash & (\neg A \vee (B \to C)) \;\to\; (\neg(\neg A \vee B) \vee (A \to C)) \\
\vdash & (\neg A \vee (\neg B \vee C)) \;\to\; ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee C)) \\
\vdash & (\neg B \vee \neg A \vee C) \;\to\; ((\neg B \wedge A) \vee \neg A \vee C)
\end{array}$$

Domanda 4: la formuola è soddisfacibile. Un possibile modello ha come universo i naturali ed interpreta il predicato P nella maniera seguente

$$P(x,y,z) \;=\; y > z \;\wedge\; y > x$$

Infatti, sia $\forall x\, \forall z\, \exists y\, P(x, y, z)$ che $\exists x\, \forall y\, \exists z\, \neg P(x, y, z)$ risultano sempre soddisfatti in questo modello.