Cognome ________________________________

Nome___________________Anno di corso____

Esame del corso di

LOGICA MATEMATICA - Canale A – D

18 – I – 2006 (prof.ssa Anna Labella)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano X e Y due insiemi di cardinalità infinita e sia W = { X , Y }. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- ☐ A. W è un insieme finito
- ☐ B. W è un insieme numerabile se e soltanto se X e Y sono numerabili
- ☐ C. $W \cup X$ è un insieme infinito
- ☐ D. W non può avere la potenza del continuo
- ☐ E. Nessuna delle precedenti è vera

2. Siano x e y due naturali distinti e non nulli; si dimostri per induzione che $x - y$ divide $x^n - y^n$.

3. Sia data la formula $\forall x \exists y\, P(x.y) \Rightarrow \forall x\, P(x,x)$. Quale delle seguenti strutture è un modello per essa?

- ☐ A. D = **N** , $|P| = \{(n,m) \mid n < m\}$.
- ☐ B. D = **esseri umani** , $|P| = \{(n,m) \mid$ n è coniuge di m$\}$.
- ☐ C. D = insieme delle rette del piano , $|P| = \{(r,r') \mid$ r è parallela ad r'$\}$.
- ☐ D. D = **N** , $|P| = \{(n,m) \mid n = 2m\}$

4. Mostrare, usando il metodo di Hilbert, che la seguente espressione è un teorema:

$$P \rightarrow (P \vee (Q \wedge R))$$

5. Si verifichi (con il metodo dei tableaux) che la seguente formula è valida:

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\, P(x, y, z) \rightarrow \exists x\, \exists y\, \exists z\, P(x, y, z)$$

SOLUZIONI:

1. le crocette andavano messe sulle lettere A, C e D

2. La dimostrazione è per induzione su n.
 Il passo base è ovvio: $x^n - y^n = 0$ e quindi $x - y$ divide $x^n - y^n$.
 Per il passo induttivo, si osservi che
 $$x^{n+1} - y^{n+1} = x\,x^n - y\,y^n = x\,x^n - (x + (y-x))\,y^n =$$
 $$x\,x^n - x\,y^n + (x-y)y^n = x\,(x^n - y^n) + (x-y)y^n$$
 Per induzione, $x - y$ divide $x^n - y^n$ e quindi anche $x\,(x^n - y^n)$; chiaramente, $x - y$ divide se stesso e quindi divide anche $(x-y)y^n$.
 In definitiva, $x - y$ divide $x\,(x^n - y^n) + (x-y)y^n$, cioè $x^{n+1} - y^{n+1}$.

3. le crocette andavano messe sulle lettere B, C e D

4. Una possibile soluzione è (si può anche partire dall'assioma 1):

$P, Q \rightarrow \neg R$	$\vdash$	P
P	$\vdash$	$(Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P$
P	$\vdash$	$\neg P \rightarrow \neg\,(Q \rightarrow \neg R)$
	$\vdash$	$P \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg\,(Q \rightarrow \neg R))$
	$\vdash$	$P \rightarrow (P \vee (Q \wedge R))$

5. Tableaux della negata:

$$\neg\,(\forall x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z) \rightarrow \exists x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z))$$
$$|$$
$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z)\,,\ \neg\exists x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z)$$
$$|$$
$$|$$
$$|$$
$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z)\,,\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,\neg P(x, y, z)$$
$$|$$
$$|$$
$$|$$
$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z)\,,\ P(a, b, c),\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,\neg P(x, y, z)$$
$$|$$
$$|$$
$$|$$
$$\forall x\,\exists y\,\exists z\,P(x, y, z)\,,\ P(a, b, c),\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,\neg P(x, y, z),\ \neg P(a, b, c)$$
$$\blacklozenge$$