Cognome \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Nome\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ FILA A

Esame dell’insegnamento di

METODI MATEMATICI - Canale A – L

8 - 1 - 2015 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

**secondo esonero (soltanto esercizi 4,5; tempo 1 ora) scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

**1.** Indicando con U l’insieme degli uomini, con A l’insieme degli uomini alti, con B quello dei belli e con C quello dei curiosi, indicare quale dei seguenti insiemi contiene tutti e soli gli uomini alti e non belli:

* il complemento (rispetto a U) dell’insieme degli uomini che sono belli o non alti 
* il complemento (rispetto a U) dell’insieme degli uomini che sono non alti e belli ☐
* l’insieme degli uomini non belli che appartengono ad A ∪ (C ∩ A) 
* l’insieme degli uomini non belli che appartengono ad A ∩ (C ∪ A) 
* l’insieme degli uomini (curiosi e alti e non belli) o (non curiosi e alti e non belli) 

**2.** Data una formula della logica proposizionale in cui compaia un solo il simbolo proposizionale A, indichiamo F la funzione che associa a ciascun booleano b il valore di verità che  assume quando A ha valore b. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

* Se è A ∧ A allora F è iniettiva  suriettiva 
* Se è A ∨ A allora F è iniettiva  suriettiva 
* Se è A ∨ ¬A allora F è iniettiva ☐ suriettiva ☐
* Se è A ∧ ¬A allora F è iniettiva ☐ suriettiva ☐
* Se è A ∧ (A ∨ ¬A) allora F è iniettiva  suriettiva 

**3.** Dimostrare (per induzione) che, (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) = 1 - xn  .

Naturalmente x≠1

Passo base: n=1 (1 - x ) 1 = 1 – x

Passo induttivo:

Supponiamo (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) = 1 - xn

Dimostriamo (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn) = 1 - xn+1

(1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn) = (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) + (1 - x )( xn) = 1 - xn  + (1 - x )( xn) = 1 - xn+14. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

A→ ((B → C) → A)

{A, B → C} |- A Ass.

{A} |- (B → C) →A T.D.

|- A→ ((B → C) → A) T.D.

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovarne un modello

(∃x P(x) ∧ ∃x ¬ P(x)) → ∃x ∃y Q(x,y)

Applicare il metodo dei tableau alla formula

Un modello è costituito da un’interpretazione che abbia un domino con un solo elemento

Cognome \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Nome\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ FILA C

Esame dell’insegnamento di

METODI MATEMATICI - Canale A – L

8 - 1 - 2015 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

**secondo esonero (soltanto esercizi 4,5; tempo 1 ora) scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

**1.** Indicando con U l’insieme degli uomini, con A l’insieme degli uomini alti, con B quello dei belli e con C quello dei curiosi, indicare quale dei seguenti insiemi contiene tutti e soli gli uomini belli e non alti:

* il complemento (rispetto a U) dell’insieme degli uomini che sono alti o non belli 
* il complemento (rispetto a U) dell’insieme degli uomini che sono (non belli) e alti ☐
* l’insieme degli uomini non alti che appartengono ad B ∪ (C ∩ B) 
* l’insieme degli uomini non alti che appartengono ad B ∩ (C ∪ B) 
* l’insieme degli uomini (curiosi e belli e non alti) o (non curiosi e belli e non alti) 

**2.** Data una formula della logica proposizionale in cui compaia un solo il simbolo proposizionale A, indichiamo F la funzione che associa a ciascun booleano b il valore di verità che  assume quando A ha valore b. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

* Se è A → A allora F è iniettiva ☐ suriettiva ☐
* Se è A ↔ ¬A allora F è iniettiva ☐ suriettiva ☐
* Se è A ∧ A allora F è iniettiva  suriettiva 
* Se è A ∨ A allora F è iniettiva  suriettiva 
* Se è A ∨ (A ∧ ¬A) allora F è iniettiva  suriettiva 

**3.** Dimostrare (per induzione) che, (1 + x )( 1 - x- x2- … - xn-1) = 1 + xn  .

Evidentemente la formula non è vera in generale, in quanto ad esempio 1 + x2  non è decomponibile, ma soltanto per indici dispari e col segno alternato, cioè

(1 + x )(1 - x+ x2- … + xn-1) = 1 + xn

Passo base: n=1 (1 - x ) 1 = 1 – x

Passo induttivo:

Supponiamo (1 + x )(1 - x+ x2- … + xn-1) = 1 + xn  per n dispari

Dimostriamo (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn+1) = 1 - xn+2

(1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn+1) = (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) + (1 - x )( xn+1) = 1 - xn  + (1 - x )( xn+1) = 1 - xn+24. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

A→ ( B → (C → A))

{A, B, C} |- A Ass.

{A, B} |- C →A T.D.

{A} |- B → (C →A) T.D.

|- A→ ( B → (C → A)) T.D.

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovarne un modello

∃x ∃y Q(x,y) → (∃x P(x) ∧ ∃x ¬ P(x))

Applicare il metodo dei tableau alla formula

Un modello è costituito da un’interpretazione che abbia un domino qualunque e |Q| = Ø

Cognome \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Nome\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ FILA B

Esame dell’insegnamento di

METODI MATEMATICI - Canale A – L

8 - 1 - 2015 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

**secondo esonero (soltanto esercizi 4,5; tempo 1 ora) scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

**1.** Indicando con U l’insieme degli uomini, con A l’insieme degli uomini alti, con B quello dei belli e con C quello dei curiosi, indicare quale dei seguenti insiemi contiene tutti e soli gli uomini belli e non alti:

* l’insieme degli uomini non alti che appartengono ad B ∪ (C ∩ B) 
* l’insieme degli uomini non alti che appartengono ad B ∩ (C ∪ B) 
* il complemento (rispetto a U) dell’insieme degli uomini che sono alti o non belli ☐
* il complemento (rispetto a U) dell’insieme degli uomini che sono (non belli) e alti 
* l’insieme degli uomini (curiosi e belli e non alti) o (non curiosi e belli e non alti) 

**2.** Data una formula della logica proposizionale in cui compaia un solo il simbolo proposizionale A, indichiamo F la funzione che associa a ciascun booleano b il valore di verità che  assume quando A ha valore b. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

* Se è A ∧ A allora F è iniettiva  suriettiva 
* Se è A ∨ A allora F è iniettiva  suriettiva 
* Se è A → A allora F è iniettiva ☐ suriettiva ☐
* Se è A ↔ ¬A allora F è iniettiva ☐ suriettiva ☐
* Se è A ∨ (A ∧ ¬A) allora F è iniettiva  suriettiva 

**3.** Dimostrare (per induzione) che, (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) = 1 - xn  .

Naturalmente x≠1

Passo base: n=1 (1 - x ) 1 = 1 – x

Passo induttivo:

Supponiamo (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) = 1 - xn

Dimostriamo (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn) = 1 - xn+1

(1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn) = (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) + (1 - x )( xn) = 1 - xn  + (1 - x )( xn) = 1 - xn+1

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

(A→ B) → (A→((A→(B → C) )→ A))

{A→ B, A→ (B → C)} |- A→ A teor.

{A→ B } |- (A→ (B → C)) → (A→ A ) T.D.

{A→ B}|- A→ (A→((A→(B → C) )→ A)) scambio premesse

|- (A→ B) → (A→((A→(B → C) )→ A)) T.D.

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovarne un modello

(∃x P(x) ∧ ∃x ¬ P(x)) → ∀x ∃y Q(x,y)

Applicare il metodo dei tableau alla formula

Un modello è costituito da un’interpretazione che abbia un domino con un solo elemento

Cognome \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Nome\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ FILA D

Esame dell’insegnamento di

METODI MATEMATICI - Canale A – L

8 - 1 - 2015 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

**secondo esonero (soltanto esercizi 4,5; tempo 1 ora) scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

**1.** Indicando con A e B generici sottoinsiemi di un universo U non vuoto, con‾A il complemento di A rispetto ad U, e rispettivamente con S, I e T le seguenti opzioni: S = *esistono A e B per i quali la proposizione è vera*, I = *non esistono A e B per i quali la proposizione è vera*, T = *la proposizione è vera per ogni A e B*, indicare le opzioni corrette (possono essere più d’una) per ciascuna delle seguenti proposizioni:

* se A ⊆ B allora A ∩ B ⊆ B S I☐ T
* se A ⊆ B allora A ∪ B ⊆ A S I☐ T☐
* B ⊆ A ∪ (B ∩‾A) S I☐ T
* A ⊆‾A S I☐ T☐
* A ∪ (A ∩ B) =‾A ∪ (‾A ∩ B) S☐ I T☐

**2.** Siano Red S relazioni di equivalenza su un insieme finito non vuoto, con rispettivamente n ed m classi di equivalenza. Quali delle seguenti proposizioni è vera?

* R ∩ S è sempre una relazione di equivalenza con al più n + m classi di equivalenza ☐
* R ∩ S è sempre una relazione di equivalenza con al più n ⋅ m classi di equivalenza 
* R ∩ S non è necessariamente una relazione di equivalenza ☐
* R ∪ S è sempre una relazione di equivalenza con al più n + m classi di equivalenza ☐
* R ∪ S è sempre una relazione di equivalenza con al più n ⋅ m classi di equivalenza ☐
* R ∪ S non è necessariamente una relazione di equivalenza 

**3.** Dimostrare (per induzione) che, (1 + x ) (1 - x- x2- … - xn-1) = 1 + xn  .

Evidentemente la formula non è vera in generale, in quanto ad esempio 1 + x2  non è decomponibile, ma soltanto per indici dispari e col segno alternato, cioè

(1 + x )(1 - x+ x2- … + xn-1) = 1 + xn

Passo base: n=1 (1 - x ) 1 = 1 – x

Passo induttivo:

Supponiamo (1 + x )(1 - x+ x2- … + xn-1) = 1 + xn  per n dispari

Dimostriamo (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn+1) = 1 - xn+2

(1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn+1) = (1 - x )( 1 + x+ x2+ … + xn-1) + (1 - x )( xn+1) = 1 - xn  + (1 - x )( xn+1) = 1 - xn+2

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

(A→ B) → (A→((A→(B → C)) → C))

|- (A→(B → C)) → ((A→ B) → (A→ C)) Ax2.

|- (A→ B) → (A→ (B → C)) → (A→ C ) scambio premesse

|- (A→ B) → (A→((A→(B → C)) → C)) scambio premesse

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovarne un modello

∀x ∃y Q(x,y) → (∃x P(x) ∧ ∃x ¬ P(x))

Applicare il metodo dei tableau alla formula

Un modello è costituito da un’interpretazione che abbia un dominio non vuoto e |Q| = Ø