A

Esame dell'insegnamento di METODI MATEMATICI - Canale A – L
5- 02 - 2018 (prof. Labella)

1. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera per qualunque A?

- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = A$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\}$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \cup \mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$ ☑
- L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ in $\mathcal{P}(A)$ è finito solo se lo è anche A ☐

2. Data una relazione binaria R su un insieme A, indichiamo con R^{-1} la sua inversa, ovvero la relazione $\{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se R è una relazione di equivalenza allora lo è anche R^{-1} ☑
- Se R è una relazione d'ordine allora lo è anche R^{-1} ☑
- Se R è una funzione iniettiva allora lo è anche R^{-1} ☐
- Se R è una funzione suriettiva allora lo è anche R^{-1} ☐
- Se R^{-1} non è una funzione, allora non lo è neanche R ☐

3. Verificare per induzione che per ogni naturale $n \geq 1$

$$\sum_{k=1,n} k(k+1) = n(n+1)(n+2)/3$$

Caso base n=1 $1.2 = 1.2.3/3$

Supponiamo l'equazione vera per n e dimostriamola per n+1.

$\sum_{k=1,n+1} k(k+1) = \sum_{k=1,n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)(n+2) = (n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2))/3 = (n+1)(n+2)(n+3)/3$ cvd

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\neg(A \to \neg B) \to (A \vee B)$$

$\{\neg A\} \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$ *Ax 1*
$\{\neg A\} \vdash \neg(A \to \neg B) \to B$ *contr.*
$\vdash \neg A \to (\neg(A \to \neg B) \to B)$ *TD*
$\vdash \neg(A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$ *scambio*
$\vdash \neg(A \to \neg B) \to (A \vee B)$ *def. di* $\vee$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$$

Il tableau resta aperto.

Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N$ $|P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$, $|Q| = \{n \mid n \text{ dispari}\}$ ☐
- $D = N$ $|P| = \emptyset$, $|Q| = \emptyset$ ☑

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall z(P(z) \to Q) \to (\exists z\, P(z) \to Q)$$

$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash \forall z(P(z) \to Q) \to (P(a) \to Q)$ *Ax 4*
$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash \forall z(P(z) \to Q)$ *Ass.*
$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash P(a) \to Q$ *MP*
$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash \neg Q \to \neg P(a)$ *contr.*
$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash \neg Q$ *Ass.*
$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash \neg P(a)$ *MP*
$\{\forall z(P(z) \to Q), \neg Q\} \vdash \forall z \neg P(z)$ *G*
$\{\forall z(P(z) \to Q)\} \vdash \neg Q \to \forall z \neg P(z)$ *TD*
$\{\forall z(P(z) \to Q)\} \vdash \neg \forall z \neg P(z) \to Q$ *contr.*
$\{\forall z(P(z) \to Q)\} \vdash \exists z\, P(z) \to Q$ *def. di* $\exists$
$\vdash \forall z(P(z) \to Q) \to (\exists z\, P(z) \to Q)$ *TD*

Esame dell'insegnamento di METODI MATEMATICI - Canale A – L

5- 02 - 2018 (prof. Labella)

1. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera per qualunque A?

- $\mathcal{P}(A)$ è sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\{\}\}$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\}$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \cap \mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$ ☑
- L'insieme delle funzioni suriettive da $\mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ è finito solo se lo è anche A ☐

2. Indichiamo con R · S la composizione di due relazioni binarie R ed S su un insieme A, ovvero la relazione $\{(a, c) \mid$ esiste b tale che $(a, b) \in S$ e $(b, c) \in R\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se R e S sono relazioni di equivalenza allora lo è anche R · S ☐
- Se R e S sono relazioni d'ordine allora lo è anche R · S ☐
- Se R · S è una relazione di equivalenza allora lo sono anche R ed S ☐
- Se R · S è una relazione d'ordine allora lo sono anche R ed S ☐
- Se R · S è una funzione, allora lo sono anche R ed S ☐

3. Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1,n} k / 2^k = 2 - (n+2)/2^n$ per ogni naturale $n \geq 1$.

Caso base n=1 1/2 = 2-3/2

Supponiamo l'equazione vera per n e dimostriamola per n+1.

$\sum_{k=1,n+1} k / 2^k = \sum_{k=1,n} k / 2^k + (n+1)/2^{n+1} = 2 - (n+2)/2^n + (n+1)/2^{n+1} = 2 - (2n+4-n-1) /2^{n+1} =$

$= 2- (n+3)/2^{n+1}$ cvd

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$$

$\{\neg A\} \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ *Ax 1*

$\{\neg A\} \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$ *contr.*

$\vdash \neg A \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B)$ *TD*

$\vdash \neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ *scambio*

$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ *def. di* $\vee$ *e* $\wedge$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile

$$\exists z(P(z) \wedge Q(z)) \rightarrow \exists z\, P(z) \wedge \exists z\, Q(z)$$

Il tableau resta aperto.

Quale delle seguenti interpretazioni ne è un modello?

- $D = N$ $|P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$, $|Q| = \{n \mid n \text{ dispari}\}$ ☑
- $D = N$ $|P| = \emptyset$, $|Q| = \emptyset$ ☑

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(P \vee \forall z\, Q(z)) \rightarrow \forall z\, (P \vee Q(z))$$

$\{\neg P \rightarrow \forall z\, Q(z)), \neg P \} \vdash \neg P \rightarrow \forall z\, Q(z)$ *Ass*

$\{\neg P \rightarrow \forall z\, Q(z)), \neg P \} \vdash \neg P$ *Ass*

$\{\neg P \rightarrow \forall z\, Q(z)), \neg P \} \vdash \forall z\, Q(z)$ *MP*

$\{\neg P \rightarrow \forall z\, Q(z)), \neg P \} \vdash \forall z\, Q(z) \rightarrow Q(a)$ *Ax 4*

$\{\neg P \rightarrow \forall z\, Q(z)), \neg P \} \vdash Q(a)$ *MP*

$\{\forall z\, (P(z) \rightarrow Q) \} \vdash \neg P \rightarrow Q(a)$ *TD*

$\{\forall z\, (P(z) \rightarrow Q) \} \vdash \forall z(\neg P \rightarrow Q(z))$ *G*

$\vdash (\forall z\, (P(z) \rightarrow Q) \rightarrow \forall z(\neg P \rightarrow Q(z))$ *TD*

$\vdash (P \vee \forall z\, Q(z)) \rightarrow \forall z\, (P \vee Q(z))$ *def. di* $\vee$

Esame dell'insegnamento di METODI MATEMATICI - Canale A – L
5- 02 - 2018 (prof. Labella)

1. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera per qualunque A?

- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = A$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\}$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap (\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \cup \mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$ ☑
- L'insieme delle funzioni iniettive da $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ in $\mathcal{P}(A)$ è finito solo se lo è anche A ☐

2. Data una relazione binaria R su un insieme A, indichiamo con R^{-1} la sua inversa, ovvero la relazione $\{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se R è una relazione di equivalenza allora lo è anche R^{-1} ☑
- Se R è una relazione d'ordine allora lo è anche R^{-1} ☑
- Se R è una funzione iniettiva allora lo è anche R^{-1} ☐
- Se R è una funzione suriettiva allora lo è anche R^{-1} ☐
- Se R^{-1} non è una funzione, allora non lo è neanche R ☐

3. Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1,n} k(k+1) = n(n+1)(n+2)/3$ per ogni naturale $n \geq 2$.
Caso base n=2 $1.2 + 2.3 = 8 = 24/3$
Supponiamo l'equazione vera per n e dimostriamola per n+1.
$\sum_{k=1,n+1} k(k+1) = \sum_{k=1,n} k(k+1) + (n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)(n+2) = (n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2))/3 = (n+1)(n+2)(n+3)/3$ cvd

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$$

$\{\neg A\} \vdash \neg B \to (A \to \neg B)$ *Ax 1*
$\{\neg A\} \vdash \neg(A \to \neg B) \to B$ *contr.*
$\vdash \neg A \to (\neg(A \to \neg B) \to B)$ *TD*
$\vdash \neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$ *scambio*

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è falsificabile

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x))$$

Il tableau della negata resta aperto
Quale delle seguenti interpretazioni ne è un contromodello?

- $D = N$ $|P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$, $|Q| = \{n \mid n \text{ dispari}\}$ ☑
- $D = N$ $|P| = \emptyset$, $|Q| = \emptyset$ ☐

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(\exists z\, P(z) \to Q) \to \forall z\, (P(z) \to Q)$$

$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q, \neg Q\} \vdash \neg \forall z\, \neg P(z) \to Q$ *Ass.*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q, \neg Q\} \vdash \neg Q \to \forall z\, \neg P(z)$ *contr.*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q, \neg Q\} \vdash \neg Q$ *Ass.*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q, \neg Q\} \vdash \forall z\, \neg P(z)$ *MP*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q, \neg Q\} \vdash \forall z \neg P(z) \to \neg P(a)$ *Ax 4*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q, \neg Q\} \vdash \neg P(a)$ *MP*
$\{\neg \forall z \neg P(z) \to Q\} \vdash \neg Q \to \neg P(a)$ *TD*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q\} \vdash P(a) \to Q$ *contr.*
$\{\neg \forall z\, \neg P(z) \to Q\} \vdash \forall z\, (P(z) \to Q)$ *G*
$\vdash \neg \forall z \neg P(z) \to Q \to \forall z\, (P(z) \to Q)$ *TD*
$\vdash (\exists z\, P(z) \to Q) \to \forall z\, (P(z) \to Q)$ *def. di* $\exists$

Esame dell'insegnamento di METODI MATEMATICI - Canale A – L
5- 02 - 2018 (prof. Labella)

1. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quali fra le seguenti affermazioni è vera per qualunque A?

- $\mathcal{P}(A)$ è sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\{\}\}$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\}$ ☐
- $\mathcal{P}(A) \cup (\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \cap \mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(A)$ ☑
- L'insieme delle funzioni suriettive da $\mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ è finito solo se lo è anche A ☐

2. Indichiamo con R · S la composizione di due relazioni binarie R ed S su un insieme A, ovvero la relazione $\{(a, c) \mid \text{esiste } b \text{ tale che } (a, b) \in S \text{ e } (b, c) \in R\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se R e S sono relazioni di equivalenza allora lo è anche R · S ☐
- Se R e S sono relazioni d'ordine allora lo è anche R · S ☐
- Se R · S è una relazione di equivalenza allora lo sono anche R ed S ☐
- Se R · S è una relazione d'ordine allora lo sono anche R ed S ☐
- Se R · S è una funzione, allora lo sono anche R ed S ☐

3. Dimostrare per induzione che $\sum_{k=1,n} k / 2^k = 2 - (n+2)/2^n$ per ogni naturale $n \geq 2$.
Caso base n=2 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2-1$
Supponiamo l'equazione vera per n e dimostriamola per n+1.
$\sum_{k=2,n+1} k / 2^k = \sum_{k=2,n} k / 2^k + (n+1)/2^{n+1} = 2 - (n+2)/2^n + (n+1)/2^{n+1} = 2 - (2n+4-n-1)/2^{n+1} =$
$= 2- (n+3)/2^{n+1}$ cvd

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

$\{\neg A\} \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ *Ax 1*
$\{\neg A\} \vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B$ *contr.*
$\vdash \neg A \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow B)$ *TD*
$\vdash \neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ *scambio*
$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ *def. di* $\wedge$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici se la seguente formula è falsificabile

$$\exists z(P(z) \wedge Q(z)) \rightarrow \exists z\, P(z) \wedge \exists z\, Q(z)$$

Il tableau della negata è chiuso, quindi non è falsificabile e non esistono contromodelli.

- $D = N$ $|P| = \{n \mid n \text{ pari}\}$, $|Q| = \{n \mid n \text{ dispari}\}$ ☐
- $D = N$ $|P| = \emptyset$, $|Q| = \emptyset$ ☐

6. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\forall z\, (P \vee Q(z)) \rightarrow (P \vee \forall z\, Q(z))$$

$\vdash \forall z\, (\neg P \rightarrow Q(z)) \rightarrow (\neg P \rightarrow \forall z Q(z))$ *Ax 5*
$\vdash \forall z\, (P \vee Q(z)) \rightarrow (P \vee \forall z\, Q(z))$ *def. di* $\vee$