Cognome ________________________________ **Nome**__________________ **Fila A**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
29 - 1 - 2015 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. In un universo U non vuoto, dati generici sottoinsiemi A, B $\subseteq$ U, indichiamo con $\bar{A}$ il complemento di A rispetto a U, e con A $\Rightarrow$ B l'insieme $\bar{A} \cup B$. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

- se a $\in$ A $\Rightarrow$ B e a $\in$ B $\Rightarrow$ C, allora a $\in$ A $\Rightarrow$ C ☑
- (a $\in$ A $\Rightarrow$ B e a $\in$ B $\Rightarrow$ C) se e soltanto se a $\in$ A $\Rightarrow$ C ☐
- se A' $\subseteq$ A allora A' $\Rightarrow$ B $\subseteq$ A $\Rightarrow$ B ☐
- se A' $\subseteq$ A allora A $\Rightarrow$ B $\subseteq$ A' $\Rightarrow$ B ☑
- se A $\Rightarrow \emptyset \subseteq$ B $\Rightarrow \emptyset$ allora A $\subseteq$ B ☐

2. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme delle parti di un insieme A. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

- Ogni funzione iniettiva f: $\mathcal{P}$(A) $\rightarrow$ A è anche suriettiva ☑
- Ogni funzione suriettiva f: $\mathcal{P}$(A) $\rightarrow$ A è anche iniettiva ☐
- Se nessuna funzione f: $\mathcal{P}$(A) $\rightarrow$ B è suriettiva, allora non lo è nessuna f: A $\rightarrow$ B ☑
- Se nessuna funzione f: $\mathcal{P}$(A) $\rightarrow$ B è iniettiva, allora non lo è nessuna f: A $\rightarrow$ B ☐
- Se esiste una funzione f: $\emptyset \rightarrow$ A allora A = $\emptyset$ ☐

3. Dimostrare (per induzione) che, da un certo n in poi, 6 + n! è divisibile per 6. Determinare il minimo n per il quale ciò avviene.

La tesi è vera per n=3 perché 3! è divisibile per 6.
Se n! è divisibile per 6 allora lo è (n+1)! = (n+1) n!.
Si verifica facilmente che per n<3 l'asserto non è vero.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg (B \vee \neg A)$$

|- $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ Ax. 3
|- $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg (\neg B \rightarrow \neg A)$ contr.
|- $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg (B \vee \neg A)$ def. di $\vee$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è valida e dire chi sono i modelli

$$(\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)) \rightarrow \exists x\, \exists y\, Q(x,y)$$

Bisogna negare la formula e mostrare che il tableau è chiuso. Essendo una tautologia, tutte le interpretazioni sono modelli.

Cognome ________________________________ **Nome**__________________ **Fila B**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
29 - 1 - 2015 (prof.ssa Anna Labella)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. In un universo U non vuoto, dati generici sottoinsiemi A, B $\subseteq$ U, indichiamo con $\overline{A}$ il complemento di A rispetto a U, e con A $\Rightarrow$ B l'insieme $\overline{A} \cup B$. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

- se $a \in A \Rightarrow B$ e $a \in B \Rightarrow C$, allora $a \in A \Rightarrow C$ ☑
- $a \in A \Rightarrow C$ se e solo se ($a \in A \Rightarrow B$ e $a \in B \Rightarrow C$) ☐
- se $B' \subseteq B$ allora $A \Rightarrow B' \subseteq A \Rightarrow B$ ☑
- se $B' \subseteq B$ allora $A \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B'$ ☐
- se $A \Rightarrow \emptyset \subseteq B \Rightarrow \emptyset$ allora $B \subseteq A$ ☑

2. Indichiamo con $\mathcal{P}$(A) l'insieme delle parti di un insieme A. Quali delle seguenti affermazioni è vera?

- Ogni funzione iniettiva f: $\mathcal{P}(A) \to A$ è anche suriettiva ☑
- Ogni funzione suriettiva f: $A \to \mathcal{P}(A)$ è anche iniettiva ☑
- Se nessuna funzione f: $A \to B$ è suriettiva, allora non lo è nessuna f: $A \to \mathcal{P}(B)$ ☑
- Se nessuna funzione f: $A \to B$ è iniettiva, allora non lo è nessuna f: $A \to \mathcal{P}(B)$ ☐
- Se esiste una funzione f: $A \to \emptyset$ allora $A = \emptyset$ ☑

3. Dimostrare (per induzione) che, da un certo n in poi, $5 + n!$ è divisibile per 5. Determinare il minimo n per il quale ciò avviene.
La tesi è vera per n=5 perché 5! è divisibile per 5.
Se n! è divisibile per 5 allora lo è $(n+1)! = (n+1)\, n!$.
Si verifica facilmente che per n<5 l'asserto non è vero in quanto 5 è numero primo.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$\neg(A \vee B) \to \neg (A \wedge B)$$

|- $(A \to \neg B) \to (\neg B \to A)$ Ax. 3 e doppia negazione
|- $\neg(\neg A \to B) \to \neg (A \to \neg B)$ contr.
|- $\neg(A \vee B) \to \neg (A \wedge B)$ def. di $\vee$ e $\wedge$

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula non è valida e trovare un contromodello

$$(\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, \neg P(x)) \to \exists x\, \exists y\, Q(x,y)$$

Si nega la formula e si vede che il tableau rimane aperto. Usando un ramo aperto si costruisce il contromodello.