Cognome ______________________________ **Nome**_________________ **FILA A**

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
08 – 06 - 2015 (proff. Anna Labella, Pietro Cenciarelli)
(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (soltanto esercizi 4,5; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Sia N l'insieme dei numeri naturali, F l'insieme delle funzioni da N in N e R la relazione $\{(f, g) \in F \times F : \exists\, h \in F$ tale che $g = h \circ f\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- R è una relazione di equivalenza ☐
- R non è una relazione di equivalenza perché non è riflessiva ☐, simmetrica ☑, transitiva ☐
- R è una relazione d'ordine ☐
- R non è una relazione d'ordine perché non è riflessiva ☐, antisimmetrica ☑, transitiva ☐
- esiste $f \in F$ tale che g R f per ogni $g \in F$ ☑
- esiste $f \in F$ tale che f R g per ogni $g \in F$ ☑

2. Siano A e B due insiemi equipotenti. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se A è infinito, ogni funzione iniettiva da A in B è anche suriettiva ☐
- Se B è infinito, ogni funzione suriettiva da A in B è anche iniettiva ☐
- Se A è finito, ogni funzione iniettiva da B in A è anche suriettiva ☑
- Se B è finito, ogni funzione suriettiva da B in A è anche iniettiva ☑

3. Dimostrare (per induzione) che, da un certo n in poi, $n! < n^n$. Determinare il minimo n per il quale ciò avviene.

La propretà non vale per 0 e 1. Per 2 sia ha $2! = 2 < 2^2 = 4$

Supponendo $n! < n^n$, dimostriamo $(n+1)! < (n+1)^{n+1}$

Infatti $(n+1)! = (n+1)\, n! < (n+1)\, n^n < (n+1)\, (n+1)^n$
Perché l'esponente è una funzione monotona.

4. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$$

$\vdash ((A \to B) \to (A \to B)) \to ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$ Ax 2
$\vdash ((A \to B) \to (A \to B))$ Teorema
$\vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$ MP

5. Verificare con il metodo dei tableau semantici che la seguente formula è soddisfacibile e trovare un modello

$$\neg \exists x\, \forall y\, Q(x,y) \to \neg\, \forall x\, \exists y\, Q(y,x)$$

Si costruisce il tableau per la formula e si fa vedere che resta aperto.
Per trovare un modello notare che questa formula è equivalente alla ben più nota

$$\forall x\, \exists y\, Q(y,x) \to \exists x\, \forall y\, Q(x,y)$$