

**Esame dell'insegnamento di  
METODI MATEMATICI - Canale A - L  
05 - 02 - 2013 (prof.ssa Anna Labella)**

**(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)**

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**1.** Come di consueto, indichiamo con  $\emptyset$  l'insieme vuoto e con  $\wp(A)$  l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (B \cup A)$  per ogni A e B
- se  $A = \wp(A)$  allora  $A = \emptyset$
- se  $A \subseteq \wp(A)$  allora  $A = \emptyset$
- se  $A \in \wp(A)$  allora  $A = \emptyset$

**2A.** Sia A l'insieme  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$  e sia  $R \subseteq \wp(A) \times \wp(A)$  la relazione:  
 $R = \{(a, B) : a \in B\}$ .

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?

Riflessiva  Antiriflessiva  Simmetrica  Antisimmetrica  Transitiva

**2C.**

- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia riflessiva, simmetrica e transitiva.  
[identità]
- Definire, se esiste, una funzione f non iniettiva e tale che  $f = f \circ f$ .  
[f(n) = il più piccolo numero primo maggiore o uguale a n]

**3.** Ricordiamo la definizione dell'operazione di fattoriale di un numero:

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = (n+1) n!$$

Dimostrare per induzione che sarebbe sciocco porre  $0! = 0$

Si può facilmente intuire che una tale modifica porterebbe a  $n! = 0$  per ogni n.

La dimostrazione di questo fatto è la seguente.

Il caso base è dato per definizione .

Passo induttivo: se  $n! = 0$  allora  $(n+1)! = (n+1) n! = (n+1) 0 = 0$

**4A.** Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\{ A \} \vdash \neg B \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$	Ax 1
$\{ A \} \vdash (\neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow B)$	contr
$\vdash A \rightarrow (\neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow B)$	TD
$\vdash \neg (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	scambio
$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	Def $\wedge$

**5A.** Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\exists x \exists y P(x,y) \wedge \exists x \exists y \neg P(y,x)$$

Il tableau resta aperto

**6A.** Trovare un modello per la formula di cui al punto 5 A

Basta prendere un dominio con almeno due elementi ed una relazione non banale per P

**4C.** Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\vdash (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$	Th
$\vdash (A \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B))$	scambio
$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow \neg (A \rightarrow \neg B)))$	contr
$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$	Def $\wedge$

**5C.** Si dimostri che la seguente formula è falsificabile usando il metodo dei tableau  
 $\forall x \forall y P(x,y) \vee \forall x \forall y \neg P(y,x)$

Il tableau della negata resta aperto

**6C.** Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5 C  
Basta prendere un dominio con almeno due elementi ed una relazione non banale per P

**Esame dell'insegnamento di  
METODI MATEMATICI - Canale A - L  
05 - 02 - 2013 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

**1.** Come di consueto, indichiamo con  $\emptyset$  l'insieme vuoto e con  $\wp(A)$  l'insieme dei sottoinsiemi di  $A$ . Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$  per ogni  $A$  e  $B$
- se  $A = \wp(A)$  allora  $\wp(A) = \emptyset$
- se  $A \subseteq \wp(A)$  allora  $\wp(A) = \emptyset$
- se  $A \in \wp(A)$  allora  $\wp(A) = \emptyset$

**2B.** Sia  $A$  l'insieme  $\emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \dots$  e sia  $R \subseteq A \times A$  la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \subseteq B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?

Riflessiva  Antiriflessiva  Simmetrica  Antisimmetrica  Transitiva

**2D.**

- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

[successore]

- Definire, se esiste, una funzione  $f$  non suriettiva e tale che  $f = f \cdot f$ .

Una funzione costante

**3.** Ricordiamo la definizione dell'operazione di potenza di un numero  $k$ :

$$k^0 = 1$$

$$k^{n+1} = k \cdot k^n$$

Dimostrare per induzione che sarebbe sciocco porre  $k^0 = 0$

Si può facilmente intuire che una tale modifica porterebbe a  $k^n = 0$  per ogni  $n$ .

La dimostrazione di questo fatto è la seguente.

Il caso base è dato per definizione.

Passo induttivo: se  $k^n = 0$  allora  $k^{n+1} = k \cdot k^n = k \cdot 0 = 0$

**4B.** Si dimostri che la seguente formula è un teorema usando il metodo di Hilbert

$\{ P(a,a) \} \vdash \forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x)$	Th
$\vdash P(a,a) \rightarrow (\forall x \forall y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x))$	TD
$\vdash \forall x \forall y P(x,y) \rightarrow (P(a,a) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x))$	scambio

**5B.** Si dimostri che il seguente enunciato è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$B \rightarrow (A \wedge B)$$

Il tableau resta aperto

**6B.** Trovare un modello per l'enunciato di cui al punto 5 B

$$v(B) = F \quad \text{oppure} \quad v(A) = v(B) = V$$

**4D.** Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$\begin{array}{l} \{ \forall x \forall y \neg P(x,y) \} \vdash P(a,a) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x) \quad \text{Th} \\ \vdash \forall x \forall y \neg P(x,y) \rightarrow (P(a,a) \rightarrow \exists x \exists y P(y,x)) \quad \text{TD} \end{array}$$

**5D.** Si dimostri che il seguente enunciato non è falsificabile usando il metodo dei tableau

$$(B \wedge A) \rightarrow (A \vee B)$$

Il tableau della negata è chiuso

**6D.** Trovare un contromodello per la formula di cui al punto 5 D

Essendo una tautologia, non ha contromodelli





**Esame dell'insegnamento di  
METODI MATEMATICI - Canale A - L  
05 - 02 - 2013 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Come di consueto, indichiamo con  $\emptyset$  l'insieme vuoto e con  $\wp(A)$  l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- se  $A \in \wp(A)$  allora  $A = \emptyset$  \_\_\_\_\_
- se  $A \subseteq \wp(A)$  allora  $A = \emptyset$  \_\_\_\_\_
- se  $A = \wp(A)$  allora  $A = \emptyset$  \_\_\_\_\_
- $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (B \cup A)$  per ogni A e B \_\_\_\_\_
- \_\_\_\_\_

2. Sia A l'insieme  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$  e sia  $R \subseteq \wp(A) \times \wp(A)$  la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \subseteq B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?

Riflessiva \_ Antiriflessiva \_ Simmetrica \_ Antisimmetrica \_ Transitiva \_

3.

- Definire, se esiste, una funzione f non iniettiva e tale che  $f = f \circ f$ .

Funzione costante

- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia riflessiva, simmetrica e transitiva.

identità

4. Dimostrare (per induzione) ...

**Esame dell'insegnamento di  
METODI MATEMATICI - Canale A - L  
05 - 02 - 2013 (prof.ssa Anna Labella)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)

scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Come di consueto, indichiamo con  $\emptyset$  l'insieme vuoto e con  $\wp(A)$  l'insieme dei sottoinsiemi di A. Quale delle seguenti proposizioni è vera?

- se  $A \in \wp(A)$  allora  $\wp(A) = \emptyset$  \_\_\_\_\_
- se  $A \subseteq \wp(A)$  allora  $\wp(A) = \emptyset$  \_\_\_\_\_
- se  $A = \wp(A)$  allora  $\wp(A) = \emptyset$  \_\_\_\_\_
- $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$  per ogni A e B \_\_\_\_\_

2. Sia A l'insieme  $\emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \dots$  e sia  $R \subseteq A \times A$  la relazione:

$$R = \{(a, B) : a \in B\}.$$

Quale delle seguenti proprietà è soddisfatta?

Riflessiva \_ Antiriflessiva \_ Simmetrica \_ Antisimmetrica \_ Transitiva \_

3.

- Definire, se esiste, una funzione f non suriettiva e tale che  $f = f \circ f$ .
  
- Definire, se esiste, una funzione che, se considerata come relazione, sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

4. Dimostrare (per induzione) ...