“Sapienza” Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l’Informatica, canale A-D

Esame scritto del 08/07/2009

1. Nome e Cognome ____ **Matricola** __________________________

Anno di corso ____________________________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano A e B due insiemi. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☐ **A.** $A \times B = \emptyset$ se e soltanto se entrambi gli insiemi sono vuoti.

☐ **B.** Se $A = \emptyset$ allora ogni relazione R su $A \times B$ è vuota.

☐ **C.** Se $B = \emptyset$ allora esiste sempre una funzione vuota da A a B.

☐ **D.** Se $A = \emptyset$ allora esiste sempre una funzione vuota da A a B.

☐ **E.** Se $A = \emptyset$ e B contiene due elementi allora esistono due funzioni distinte da A a B.

2. Si dimostri per induzione che $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (n+1)(2n+1)$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B).$$

4. Provare mediante il metodo dei tableau la soddisfacibilità della seguente formula

$$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow \exists z \forall u (\neg P(u,z))).$$

Quale delle seguenti interpretazioni è un modello?

☐ **A.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N}, m = 2n\}$.

☐ **B.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N}, n = 2m\}$.

☐ **C.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

☐ **D.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \emptyset$.

☐ **E.** $D = X$, $|P| = \Delta_X$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: B, D

2. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 0$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{i=0}^{0}(4i+1) = (4\cdot 0+1) = 1$ e $(n+1)(2n+1) = 1$. Quindi $n = 0$ è il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (n+1)(2n+1)$ è soddisfatta per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n+1}(4i+1) = ((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3).$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo quanto voluto:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(4i+1) = \underline{\sum_{i=0}^{n}(4i+1)}+(4(n+1)+1) = \underline{(n+1)(2n+1)}+(4n+5) = 2n^2+3n+1+4n+5 = 2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3).$$

3. Possiamo notare che $(A \wedge B) \to (A \vee B) \equiv \neg(A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$. Una dimostrazione possibile è la seguente:

1.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg B \to (A \to \neg B)$	Assioma 1
2.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B$	Contrapposizione 1
3.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg(A \to \neg B) \to B$	Doppia negazione 2
4.		$\vdash \neg A \to (\neg(A \to \neg B) \to B)$	Deduzione 3
5.		$\vdash \neg(A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$	Scambio premessa 4
6.		$\vdash (A \wedge B) \to (A \vee B)$	Equivalenza logica 5

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$\underline{\forall x}\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z)))$$

$$|$$

$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \underline{\exists y}((P(a,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z)))$$

$$|$$

$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), P(a,b)\underline{\to}\exists z\forall u(\neg P(u,z))$$

$$/ \qquad\qquad \backslash$$

$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \neg P(a,b) \qquad \forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \underline{\exists z}\forall u(\neg P(u,z))$$

$$|$$

$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \underline{\forall u}(\neg P(u,c))$$

$$|$$

$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \forall u(\neg P(u,c)), \neg P(c,c)$$

Possiamo notare che entrambi i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau), quindi la formula è soddisfacibile. Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: A, B, D

“Sapienza” Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l’Informatica, canale A-D

Esame scritto del 08/07/2009

2. Nome e Cognome ______________________________ **Matricola** ______________________

Anno di corso ____________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Siano A e B due insiemi. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☐ **A.** Se $A = \emptyset$ allora esiste sempre una funzione vuota da A a B.

☐ **B.** Se $A = \emptyset$ e B contiene due elementi allora esistono due funzioni distinte da A a B.

☐ **C.** Se $A = \emptyset$ allora ogni relazione R su $A \times B$ è vuota.

☐ **D.** Se $B = \emptyset$ allora esiste sempre una funzione vuota da A a B.

☐ **E.** $A \times B = \emptyset$ se e soltanto se entrambi gli insiemi sono vuoti.

2. Si dimostri per induzione che $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (n+1)(2n+1)$, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(B \wedge A) \rightarrow (A \vee B).$$

4. Provare mediante il metodo dei tableau la soddisfacibilità della seguente formula

$$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow \exists z \forall u (\neg P(u,z))).$$

Quale delle seguenti interpretazioni è un modello?

☐ **A.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

☐ **B.** $D = X$, $|P| = \Delta_X$.

☐ **C.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \emptyset$.

☐ **D.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}, n = 2m\}$.

☐ **E.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(n,m) : n,m \in \mathbb{N}, m = 2n\}$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: A, C

2. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 0$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $\sum_{i=0}^{0}(4i+1) = (4\cdot 0+1) = 1$ e $(n+1)(2n+1) = 1$. Quindi $n = 0$ è il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $\sum_{i=0}^{n}(4i+1) = (n+1)(2n+1)$ è soddisfatta per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n+1}(4i+1) = ((n+1)+1)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3).$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo quanto voluto:

$$\sum_{i=0}^{n+1}(4i+1) = \underline{\sum_{i=0}^{n}(4i+1)}+(4(n+1)+1) = \underline{(n+1)(2n+1)}+(4n+5) = 2n^2+3n+1+4n+5 = 2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3).$$

3. Possiamo notare che $(B \wedge A) \to (A \vee B) \equiv \neg(B \to \neg A) \to (\neg A \to B)$. Una dimostrazione possibile è la seguente:

1.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg B \to (A \to \neg B)$	Assioma 1
2.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg B \to (\neg\neg B \to \neg A)$	Contrapposizione 1
3.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg B \to (B \to \neg A)$	Doppia negazione 2
4.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg(B \to \neg A) \to \neg\neg B$	Contrapposizione 3
5.	$\{\neg A\}$	$\vdash \neg(B \to \neg A) \to B$	Doppia negazione 4
6.		$\vdash \neg A \to (\neg(B \to \neg A) \to B)$	Deduzione 5
7.		$\vdash \neg(B \to \neg A) \to (\neg A \to B)$	Scambio premessa 6
8.		$\vdash (A \wedge B) \to (A \vee B)$	Equivalenza logica 7

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$\underline{\forall x}\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z)))$$
$$|$$
$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \underline{\exists y}((P(a,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z)))$$
$$|$$
$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), P(a,b)\underline{\to}\exists z\forall u(\neg P(u,z))$$
$$/ \qquad\qquad \backslash$$
$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \neg P(a,b) \qquad \forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \underline{\exists z}\forall u(\neg P(u,z))$$
$$|$$
$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \underline{\forall u}(\neg P(u,c))$$
$$|$$
$$\forall x\exists y(P(x,y) \to \exists z\forall u(\neg P(u,z))), \forall u(\neg P(u,c)), \neg P(c,c)$$

Possiamo notare che entrambi i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau), quindi la formula è soddisfacibile. Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: C, D, E