"Sapienza" Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l'Informatica, canale A-D

Esame scritto del 26/01/2009

1. Nome e Cognome ____ **Matricola** ____________________

Anno di corso __________________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $f : X \to X$ una funzione totale e iniettiva e sia $R \subseteq X \times X$ definito da

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in R \text{ se e soltanto se } f(x) = f(y).$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☐ **A.** R è di equivalenza.

☐ **B.** Ogni classe di equivalenza è formata da più di un elemento.

☐ **C.** f è suriettiva in generale.

☐ **D.** X/R è in corrispondenza biunivoca con X.

☐ **E.** Può accadere che $dom(f) \cap Im(f) = \emptyset$.

2. Si dimostri per induzione che $\forall n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B.$$

4. Provare mediante il metodo dei tableau la soddisfacibilità della seguente formula

$$\forall x \exists y (P(x, y) \to Q(x, y)).$$

Quale delle seguenti interpretazioni è un modello?

☐ **A.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x = \sqrt{y}\}$, $|Q| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x > y\}$.

☐ **B.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x = \sqrt{y}\}$, $|Q| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x > y\}$.

☐ **C.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x \geq y\}$, $|Q| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x = \sqrt{y}\}$.

☐ **D.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x > y\}$, $|Q| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}, x = \sqrt[3]{y}\}$.

☐ **E.** $D = \mathbb{Q}_+$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}_+, x \leq y\}$, $|Q| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}_+, x > y\}$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: A, D, E

2. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 1$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $n! = 1! = 1$ e $2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ e si ha che $1 \geq 1$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $n! \geq 2^{n-1}$ è soddisfatta per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che $(n+1)! \geq 2^n$.

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo: $(n+1)! = (n+1) \cdot \underline{n!} \geq (n+1) \cdot \underline{2^{n-1}}$.

Possiamo notare che per ottenere quanto voluto è sufficiente che valga $n + 1 \geq 2$, infatti si avrebbe

$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

La condizione $n+1 \geq 2$ implica che quanto dimostrato vale per $n \geq 1$, che è esattamente il caso base della dimostrazione.

3. Possiamo notare che $(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B \equiv \neg(\neg A \to \neg(\neg A \to B)) \to B$. Una dimostrazione possibile è la seguente:

$$
\begin{array}{llll}
1. & \{\neg B, \neg A \to B\} & \vdash \neg A \to B & \text{Ipotesi} \\
2. & \{\neg B, \neg A \to B\} & \vdash \neg B \to \neg\neg A & \text{Contrapposizione 1} \\
3. & \{\neg B, \neg A \to B\} & \vdash \neg B \to A & \text{Doppia negazione 2} \\
4. & \{\neg B, \neg A \to B\} & \vdash \neg B & \text{Ipotesi} \\
5. & \{\neg B, \neg A \to B\} & \vdash A & \text{MP 3,4} \\
6. & \{\neg B\} & \vdash (\neg A \to B) \to A & \text{Deduzione 5} \\
7. & \{\neg B\} & \vdash \neg A \to \neg(\neg A \to B) & \text{Contrapposizione 6} \\
8. & & \vdash \neg B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to B)) & \text{Deduzione 7} \\
9. & & \vdash \neg B \to \neg\neg(\neg A \to \neg(\neg A \to B)) & \text{Doppia negazione 8} \\
10. & & \vdash \neg(\neg A \to \neg(\neg A \to B)) \to B & \text{Contrapposizione 9} \\
11. & & \vdash (\neg A \wedge (A \vee B)) \to B & \text{Equivalenza logica 10}
\end{array}
$$

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$
\begin{array}{c}
\underline{\forall x}\exists y(P(x,y) \to Q(x,y)) \\
| \\
\forall x\exists y(P(x,y) \to Q(x,y)), \underline{\exists y}(P(a,y) \to Q(a,y)) \\
| \\
\forall x\exists y(P(x,y) \to Q(x,y)), P(a,b)\underline{\to}Q(a,b) \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \\
\forall x\exists y(P(x,y) \to Q(x,y)), \neg P(a,b) \qquad \forall x\exists y(P(x,y) \to Q(x,y)), Q(a,b)
\end{array}
$$

Possiamo notare che entrambi i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau). Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: B, D

"Sapienza" Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l'Informatica, canale A-D

Esame scritto del 26/01/2009

2. Nome e Cognome ______________________________ **Matricola** ______________

Anno di corso ____________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $f : X \to X$ una funzione totale e iniettiva e sia $R \subseteq X \times X$ definito da

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in R \text{ se e soltanto se } f(x) = f(y).$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☐ **A.** R non è una relazione d'ordine debole.

☐ **B.** Se X è finito allora f è suriettiva.

☐ **C.** Se X è infinito allora f non è mai suriettiva.

☐ **D.** Può accadere che $Im(f) \cap X = \emptyset$.

☐ **E.** R coincide con la diagonale di X.

2. Si dimostri per induzione che $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$((\neg A \vee B) \wedge A) \to B.$$

4. Provare mediante il metodo dei tableau la soddisfacibilità della seguente formula

$$\forall x \exists y \exists z (P(x, y) \vee Q(y, z)).$$

Quale delle seguenti interpretazioni è un modello?

☐ **A.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \geq y\}$, $|Q| = \{(y, z) : y, z \in \mathbb{N}, y \leq z\}$.

☐ **B.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x > y\}$, $|Q| = \{(y, z) : y, z \in \mathbb{N}, y \leq z\}$.

☐ **C.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \geq y\}$, $|Q| = \{(y, z) : y, z \in \mathbb{N}, y < z\}$.

☐ **D.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \text{ è il doppio di } y\}$, $|Q| = \{(y, z) : y, z \in \mathbb{N}, y = z\}$.

☐ **E.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x = y\}$, $|Q| = \{(y, z) : y, z \in \mathbb{N}, y \text{ è il doppio di } z\}$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: B, D, E

2. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 0$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $3^{2n} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ e 0 è divisibile per 8. Quindi $n = 0$ è il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8 per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che $3^{2(n+1)} - 1$ è divisibile per 8.

Ora vogliamo riscrivere l'espressione $3^{2n+2} - 1$ in una forma in cui compaia il termine $3^{2n} - 1$, in modo tale che sia possibile applicare l'ipotesi induttiva. Possiamo notare che: $3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2n} - 1$.

Possiamo inoltre aggiungere e sottrarre una stessa quantità alla nostra espressione senza modificarne il valore:
$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2n} - 1 = 9 \cdot 3^{2n} - 1 + 3^{2n} - 1 - 3^{2n} + 1 = (9-1) \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1 = 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1.$

Per ipotesi induttiva $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8 e inoltre $8 \cdot 3^{2n}$ è banalmente divisibile per 8 quindi anche la loro somma $8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1$ (che per quanto mostrato precedentemente è uguale a $3^{2(n+1)} - 1$) è divisibile per 8.

3. Possiamo notare che $((\neg A \vee B) \wedge A) \to B \equiv \neg((A \to B) \to \neg A) \to B$. Una dimostrazione possibile è la seguente:

1.	$\{\neg B, A \to B\}$	$\vdash A \to B$	Ipotesi
2.	$\{\neg B, A \to B\}$	$\vdash \neg B \to \neg A$	Contrapposizione 1
3.	$\{\neg B, A \to B\}$	$\vdash \neg B$	Ipotesi
4.	$\{\neg B, A \to B\}$	$\vdash \neg A$	MP 2,3
5.	$\{\neg B\}$	$\vdash (A \to B) \to \neg A$	Deduzione 4
6.		$\vdash \neg B \to ((A \to B) \to \neg A)$	Deduzione 5
7.		$\vdash \neg B \to \neg\neg((A \to B) \to \neg A)$	Doppia negazione 6
8.		$\vdash \neg((A \to B) \to \neg A) \to B$	Contrapposizione 7
9.		$\vdash ((\neg A \vee B) \wedge A) \to B$	Equivalenza logica 8

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$\underline{\forall x}\exists y \exists z(P(x,y) \vee Q(y,z))$$
$$|$$
$$\forall x \exists y \exists z(P(x,y) \vee Q(y,z)), \underline{\exists y}\exists z(P(a,y) \vee Q(y,z))$$
$$|$$
$$\forall x \exists y \exists z(P(x,y) \vee Q(y,z)), \underline{\exists z}(P(a,b) \vee Q(b,z))$$
$$|$$
$$\forall x \exists y \exists z(P(x,y) \vee Q(y,z)), P(a,b)\underline{\vee}Q(b,c)$$
$$/ \qquad\qquad \backslash$$
$$\forall x \exists y \exists z(P(x,y) \vee Q(y,z)), P(a,b) \qquad \forall x \exists y \exists z(P(x,y) \vee Q(y,z)), Q(b,c)$$

Possiamo notare che entrambi i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau). Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: A, B, C, D, E

“Sapienza” Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l’Informatica, canale A-D

Esame scritto del 26/01/2009

3. Nome e Cognome ____________________________ **Matricola** ______________________

Anno di corso ______________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $R \subseteq X \times X$ una relazione di equivalenza e sia $f_R : X \to X/R$ la corrispondenza che associa ad $x \in X$ la classe $[x]_R$.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☐ **A.** f_R non è sempre una funzione.

☐ **B.** f_R è sempre iniettiva.

☐ **C.** Il complementare di R in $X \times X$ è necessariamente vuoto.

☐ **D.** X/R può essere vuoto.

☐ **E.** $\#X \leq \#X/R$.

2. Si dimostri per induzione che $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8, selezionando come caso base il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$((\neg A \vee B) \wedge A) \to B.$$

4. Provare mediante il metodo dei tableau la soddisfacibilità della seguente formula

$$\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y)).$$

Quale delle seguenti interpretazioni è un modello?

☐ **A.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}, x = \sqrt{y}\}$, $|Q| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}, x \leq y\}$.

☐ **B.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$, $|Q| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{N}, x = \sqrt[3]{y}\}$.

☐ **C.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}, x \geq y\}$, $|Q| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}, x = \sqrt{y}\}$.

☐ **D.** $D = \mathbb{Q}$, $|P| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}, x > y\}$, $|Q| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}, x = \sqrt[3]{y}\}$.

☐ **E.** $D = \mathbb{Q}_+$, $|P| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}_+, x \leq y\}$, $|Q| = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{Q}_+, x = \sqrt[3]{y}\}$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: D

2. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 0$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $3^{2n} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ e 0 è divisibile per 8. Quindi $n = 0$ è il minimo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa questa proprietà.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8 per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che $3^{2(n+1)} - 1$ è divisibile per 8.

Ora vogliamo riscrivere l'espressione $3^{2n+2} - 1$ in una forma in cui compaia il termine $3^{2n} - 1$, in modo tale che sia possibile applicare l'ipotesi induttiva. Possiamo notare che: $3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2n} - 1$.

Possiamo inoltre aggiungere e sottrarre una stessa quantità alla nostra espressione senza modificarne il valore:

$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^2 \cdot 3^{2n} - 1 = 9 \cdot 3^{2n} - 1 + 3^{2n} - 1 - 3^{2n} + 1 = (9-1) \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1 = 8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1.$

Per ipotesi induttiva $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8 e inoltre $8 \cdot 3^{2n}$ è banalmente divisibile per 8 quindi anche la loro somma $8 \cdot 3^{2n} + 3^{2n} - 1$ (che per quanto mostrato precedentemente è uguale a $3^{2(n+1)} - 1$) è divisibile per 8.

3. Possiamo notare che $((\neg A \vee B) \wedge A) \rightarrow B \equiv \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow B$. Una dimostrazione possibile è la seguente:

1.	$\{\neg B, A \rightarrow B\}$	$\vdash A \rightarrow B$	Ipotesi
2.	$\{\neg B, A \rightarrow B\}$	$\vdash \neg B \rightarrow \neg A$	Contrapposizione 1
3.	$\{\neg B, A \rightarrow B\}$	$\vdash \neg B$	Ipotesi
4.	$\{\neg B, A \rightarrow B\}$	$\vdash \neg A$	MP 2,3
5.	$\{\neg B\}$	$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$	Deduzione 4
6.		$\vdash \neg B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$	Deduzione 5
7.		$\vdash \neg B \rightarrow \neg\neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A)$	Doppia negazione 6
8.		$\vdash \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A) \rightarrow B$	Contrapposizione 7
9.		$\vdash ((\neg A \vee B) \wedge A) \rightarrow B$	Equivalenza logica 8

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$\underline{\exists x}\forall y(P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$$

$$|$$

$$\underline{\forall y}(P(a,y) \rightarrow Q(a,y))$$

$$|$$

$$\forall x \exists y(P(a,y) \rightarrow Q(a,y)), P(a,a)\underline{\rightarrow}Q(a,a)$$

$$/ \qquad\qquad\qquad \backslash$$

$$\forall x \exists y(P(a,y) \rightarrow Q(a,y)), \neg P(a,a) \qquad\qquad \forall x \exists y(P(a,y) \rightarrow Q(a,y)), Q(a,a)$$

Possiamo notare che entrambi i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau). Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: A, C, D

“Sapienza” Università di Roma

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento di Metodi matematici per l’Informatica, canale A-D

Esame scritto del 26/01/2009

4. Nome e Cognome ____ **Matricola** ________________________

Anno di corso ______________________________

☐ **secondo esonero (svolgere solo gli esercizi 3 e 4; tempo: 1 ora)**

☐ **scritto completo (svolgere tutti gli esercizi; tempo: 2 ore)**

(Ciascuno dei quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

1. Sia $R \subseteq X \times X$ una relazione di equivalenza e sia $f_R : X \to X/R$ la corrispondenza che associa ad $x \in X$ la classe $[x]_R$.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☐ **A.** se f_R è iniettiva allora R è la diagonale di X.

☐ **B.** f_R è suriettiva.

☐ **C.** $\#X/R > \#X$.

☐ **D.** Se R è la diagonale di X allora f_R è una corrispondenza biunivoca.

☐ **E.** $X \cap X/R = \emptyset$.

2. Si dimostri per induzione che $\forall n \geq 1$, $n! \geq 2^{n-1}$.

---

3. Provare con il metodo di Hilbert che la seguente formula è un teorema

$$(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B.$$

4. Provare mediante il metodo dei tableau la soddisfacibilità della seguente formula

$$\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \vee Q(x, z)).$$

Quale delle seguenti interpretazioni è un modello?

☐ **A.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x > y\}$, $|Q| = \{(x, z) : x, z \in \mathbb{N}, x \leq z\}$.

☐ **B.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \geq y\}$, $|Q| = \{(x, z) : x, z \in \mathbb{N}, x \leq z\}$.

☐ **C.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \geq y\}$, $|Q| = \{(x, z) : x, z \in \mathbb{N}, x < z\}$.

☐ **D.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x = y\}$, $|Q| = \{(x, z) : x, z \in \mathbb{N}, x \text{ è il doppio di } z\}$.

☐ **E.** $D = \mathbb{N}$, $|P| = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \text{ è il doppio di } y\}$, $|Q| = \{(x, z) : x, z \in \mathbb{N}, x = z\}$.

Soluzioni:

1. Risposte vere: A, B, D, E

2. Applichiamo l'induzione su n.

Caso base: se $n = 1$ otteniamo che la relazione in esame è vera, infatti $n! = 1! = 1$ e $2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ e si ha che $1 \geq 1$.

Ipotesi induttiva: Supponiamo che $n! \geq 2^{n-1}$ è soddisfatta per un qualche valore n fissato.

Passo induttivo: Vogliamo dimostrare che la relazione vale anche per $n+1$, cioè vogliamo dimostrare che $(n+1)! \geq 2^n$.

Utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo: $(n+1)! = (n+1) \cdot \underline{n!} \geq (n+1) \cdot \underline{2^{n-1}}$.

Possiamo notare che per ottenere quanto voluto è sufficiente che valga $n+1 \geq 2$, infatti si avrebbe

$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$.

La condizione $n+1 \geq 2$ implica che quanto dimostrato vale per $n \geq 1$, che è esattamente il caso base della dimostrazione.

3. Possiamo notare che $(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B \equiv \neg(\neg A \to \neg(\neg A \to B)) \to B$. Una dimostrazione possibile è la seguente:

1.	$\{\neg B, \neg A \to B\}$	$\vdash \neg A \to B$	Ipotesi
2.	$\{\neg B, \neg A \to B\}$	$\vdash \neg B \to \neg\neg A$	Contrapposizione 1
3.	$\{\neg B, \neg A \to B\}$	$\vdash \neg B \to A$	Doppia negazione 2
4.	$\{\neg B, \neg A \to B\}$	$\vdash \neg B$	Ipotesi
5.	$\{\neg B, \neg A \to B\}$	$\vdash A$	MP 3,4
6.	$\{\neg B\}$	$\vdash (\neg A \to B) \to A$	Deduzione 5
7.	$\{\neg B\}$	$\vdash \neg A \to \neg(\neg A \to B)$	Contrapposizione 6
8.		$\vdash \neg B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to B))$	Deduzione 7
9.		$\vdash \neg B \to \neg\neg(\neg A \to \neg(\neg A \to B))$	Doppia negazione 8
10.		$\vdash \neg(\neg A \to \neg(\neg A \to B)) \to B$	Contrapposizione 9
11.		$\vdash (\neg A \wedge (A \vee B)) \to B$	Equivalenza logica 10

4. Costruiamo il tableau della formula in esame (senza negarla). Se otteniamo almeno un ramo aperto allora la formula è soddisfacibile. Il tableau della formula è il seguente:

$$
\begin{array}{c}
\underline{\forall x}\exists y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)) \\
| \\
\forall x \exists y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)), \underline{\exists y}\forall z(P(a,y) \vee Q(a,z)) \\
| \\
\forall x \exists y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)), \underline{\forall z}(P(a,b) \vee Q(a,z)) \\
| \\
\forall x \exists y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)), \forall z(P(a,b) \vee Q(a,z)), P(a,b)\underline{\vee}Q(a,a) \\
/ \qquad\qquad\qquad \backslash \\
\forall x \exists y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)), \forall z(P(a,b) \vee Q(a,z)), P(a,b) \qquad \forall x \exists y \forall z(P(x,y) \vee Q(x,z)), \forall z(P(a,b) \vee Q(a,z)), Q(a,a)
\end{array}
$$

Possiamo notare che entrambi i nodi sono aperti (e lo rimarrebbero anche se continuassimo ad estendere il tableau). Comunque sarebbe stato sufficiente mostrare un solo nodo aperto del tableau per affermare che la formula è soddisfacibile.

Risposte vere: B, C, D