Fila A

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
11- 01 - 2016 (proff. Labella, Cenciarelli)
(Il quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Indichiamo con #A la cardinalità di un insieme A, e con $\mathcal{P}$(A) l'insieme dei suoi sottoinsiemi. Sia A un insieme e B = $\{X \subseteq \mathcal{P}(A) : \#X \leq 1\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- A e B non possono mai essere uguali, comunque si scelga A ☐
- A = B solo se A è l'insieme vuoto ☐
- A = B solo se A è infinito ☑
- se A = B allora A = {42} ☐

2. Sia B l'insieme {0, 1} e sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni B → B. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Ogni funzione suriettiva in $\mathcal{F}$ è anche iniettiva ☑
- Ogni funzione iniettiva in $\mathcal{F}$ è anche suriettiva ☑
- Esistono solo due funzioni in $\mathcal{F}$ che, considerate come relazioni, sono transitive ☐
- Esistono solo due funzioni in $\mathcal{F}$ che, considerate come relazioni, sono simmetriche ☑

3. Dimostrare (per induzione) che nei numeri naturali

$$(1\text{- }(1/2)) \cdot (1\text{- }(1/3)) \cdots (1\text{- }(1/n)) = 1/n \text{ per ogni } n \geq 2$$

passo base n=2 $1 - (1/2) = 1/2$

Supponiamo l'enunciato vero per n e dimostriamolo per n+1

$1\text{- }(1/2)) \cdot (1\text{- }(1/3)) \cdots (1\text{- }(1/n)) \cdot (1\text{- }(1/n+1)) = 1/n \cdot (1\text{- }(1/n+1)) = 1/n \cdot (n/n+1) = 1/n+1$ cvd

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$(A\rightarrow (B \rightarrow \neg (A\rightarrow\neg B)))$$

|- $(A\rightarrow\neg B) \rightarrow (A\rightarrow\neg B)$ teor.
|- $A\rightarrow ((A\rightarrow\neg B) \rightarrow\neg B)$ scambio
|- $A\rightarrow (B\rightarrow\neg(A\rightarrow\neg B))$ contr

5 . Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\forall x\exists z\ P(x,z) \wedge \forall x\neg\exists z\ P(x,z)$$
$$|\alpha$$
$$\forall x\exists z\ P(x,z) , \forall x\neg\exists z\ P(x,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\exists z\ P(x,z), \exists z\ P(a,z) , \forall x\neg\exists z\ P(x,z)$$
$$|\delta$$
$$\forall x\exists z\ P(x,z), P(a,b) , \forall x\neg\exists z\ P(x,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\exists z\ P(x,z), P(a,b) , \forall x\neg\exists z\ P(x,z), \neg\exists z\ P(a,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\exists z\ P(x,z), P(a,b) , \forall x\neg\exists z\ P(x,z), \neg\ P(a,b)$$

Il tableau è chiuso, quindi la formula è insoddisfacibile

6 Trovare un modello per la formula di cui al punto 5
Non esistono modelli per formule insoddisfacibili.

Fila B

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
11- 01 - 2016 (proff. Labella, Cenciarelli)
(Il quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora) ☐ scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia A un insieme. Indichiamo con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di A e con B l'insieme $\{\{a\} \in \mathcal{P}(A) : a \in A\} \cup \{\emptyset\}$, dove $\emptyset$ indica l'insieme vuoto. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- B non può mai essere uguale ad A, comunque si scelga A ☐
- Se A = $\emptyset$ allora A = B ☐
- A = B solo se A è infinito ☑
- se A = B e b $\in$ B, allora {b} $\in$ B ☑

2. Sia A un insieme e $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni $A \to \{0, 1\}$. Sia $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ la relazione su $\mathcal{F}$ tale che f R g se e solo se $f(a) \leq g(a)$ per ogni $a \in A$.Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- $\mathcal{F}$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ ☑
- R è una relazione di equivalenza ☐
- R è una relazione antisimmetrica ☑
- $\mathcal{F}$ è un'algebra di Boole ☑

3. Dimostrare (per induzione) che nei numeri naturali

$$(1- (1/2)) \cdot (1- (1/3)) \cdots (1- (1/n)) = 1/n \text{ per ogni } n \geq 2$$

passo base n=2 $1 - (1/2) = 1/2$

Supponiamo l'enunciato vero per n e dimostriamolo per n+1

$1- (1/2)) \cdot (1- (1/3)) \cdots (1- (1/n)) \cdot (1- (1/n+1)) = 1/n \cdot (1- (1/n+1)) = 1/n \cdot (n/n+1) = 1/n+1$ cvd

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$\neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$$

	$\vdash (\neg B \to (A \to \neg B))$	Ax 1
$\{\neg A\}$	$\vdash (\neg (A \to \neg B) \to B)$	contr
	$\vdash \neg A \to (\neg (A \to \neg B) \to B)$	TD
	$\vdash \neg (A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$	scambio

5 . Si dimostri che la seguente formula è insoddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\exists z\, \forall x\, P(x,z) \land \neg\exists z\, \forall x\, P(x,z)$$
$$|\alpha$$
$$\exists z\, \forall x\, P(x,z),\ \neg\exists z\, \forall x\, P(x,z)$$
$$|\delta$$
$$\forall x\, P(x,a),\ \neg\exists z\, \forall x\, P(x,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\, P(x,a),\ \neg\exists z\, \forall x\, P(x,z),\ \neg\forall x\, P(x,a)$$
$$|\delta$$
$$\forall x\, P(x,a),\ \neg\exists z\, \forall x\, P(x,z),\ \neg P(b,a)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\, P(x,a),\ P(b,a),\ \neg\exists z\, \forall x\, P(x,z),\ \neg P(b,a)$$

Il tableau è chiuso, quindi la formula è insoddisfacibile

6 Trovare, se possibile, un modello per la formula di cui al punto 5

Non esistono modelli per formule insoddisfacibili.

Fila C

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
11- 01 - 2016 (proff. Labella, Cenciarelli)
(Il quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ **secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora)** ☐ **scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)**

1. Indichiamo con #A la cardinalità di un insieme A, e con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme dei suoi sottoinsiemi. Sia A un insieme e $B = \{X \subseteq \mathcal{P}(A) : \#X \leq 1\}$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- se A = B allora A = {7} ☐
- Se A = B allora A è l'insieme vuoto ☐
- A = B solo se A è infinito ☑
- A e B non possono mai essere uguali, comunque si scelga A ☐

2. Sia B l'insieme {0, 1} e sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni $B \to B$. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Esistono solo due funzioni in $\mathcal{F}$ che, considerate come relazioni, sono transitive ☐
- Esistono solo due funzioni in $\mathcal{F}$ che, considerate come relazioni, sono simmetriche ☑
- Esistono in $\mathcal{F}$ funzioni suriettive che non sono iniettive ☐
- Ogni funzione iniettiva in $\mathcal{F}$ è anche suriettiva ☑

3. Dimostrare (per induzione) che nei numeri naturali

$$(1-(1/2)) \cdot (1-(1/3)) \cdots (1-(1/n)) = 1/n \text{ per ogni } n \geq 2$$

passo base n=2 $1-(1/2)=1/2$

Supponiamo l'enunciato vero per n e dimostriamolo per n+1

$1-(1/2)) \cdot (1-(1/3)) \cdots (1-(1/n)) \cdot (1-(1/n+1)) = 1/n \cdot (1-(1/n+1)) = 1/n \cdot (n/n+1) = 1/n+1$ cvd

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$(A \to (B \to (A \wedge B)))$$

$\vdash (A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$ teor.
$\vdash A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$ scambio
$\vdash A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ contr
$\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$ def

5 . Si dimostri che la seguente formula è soddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\forall x \exists z\ P(x,z) \wedge \forall x \forall z\ \neg P(x,z)$$
$$|\alpha$$
$$\forall x \exists z\ P(x,z),\ \forall x \forall z\ \neg P(x,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x \exists z\ P(x,z),\ \exists z\ P(a,z),\ \forall x \forall z\ \neg P(x,z)$$
$$|\delta$$
$$\forall x \exists z\ P(x,z),\ P(a,b),\ \forall x \forall z\ \neg P(x,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x \exists z\ P(x,z),\ P(a,b),\ \forall x \forall z\ \neg P(x,z),\ \forall z\ \neg P(a,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x \exists z\ P(x,z),\ P(a,b),\ \forall x \neg \exists z\ P(x,z),\ \neg P(a,b)$$

Il tableau è chiuso, quindi la formula è insoddisfacibile

6 Trovare un modello per la formula di cui al punto 5

Non esistono modelli per formule insoddisfacibili.

Fila D

Esame dell'insegnamento di
METODI MATEMATICI - Canale A – L
11- 01 - 2016 (proff. Labella, Cenciarelli)
(Il quiz non ha necessariamente una ed una sola risposta giusta)

☐ secondo esonero (solo esercizi 4,5,6; tempo 1 ora) ☐ scritto completo (tutti gli esercizi; tempo 2 ore)

1. Sia A un insieme. Indichiamo con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme dei sottoinsiemi di A e con B l'insieme $\{\{a\} \in \mathcal{P}(A) : a \in A\} \cup \{\emptyset\}$, dove $\emptyset$ indica l'insieme vuoto. Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- Se A = $\emptyset$ allora A = B ☐
- Se A è finito allora A è diverso da B ☑
- B non può mai essere uguale ad A, comunque si scelga A ☐
- se A = B e b $\in$ B, allora {b} $\in$ B ☑

2. Sia A un insieme e $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni $A \to \{0, 1\}$. Sia $R \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ la relazione su $\mathcal{F}$ tale che f R g se e solo se $f(a) \leq g(a)$ per ogni $a \in A$.Quali fra le seguenti affermazioni è vera?

- $\mathcal{F}$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ ☑
- $\mathcal{F}$ è un'algebra di Boole ☑
- R è una relazione di simmetrica solo se A = $\emptyset$ ☑
- R è una relazione d'ordine ☑

3. Dimostrare (per induzione) che nei numeri naturali

$$(1-(1/2))\cdot(1-(1/3))\cdots(1-(1/n)) = 1/n \text{ per ogni } n \geq 2$$

passo base n=2 $1-(1/2)=1/2$

Supponiamo l'enunciato vero per n e dimostriamolo per n+1

$1-(1/2))\cdot(1-(1/3))\cdot\cdot(1-(1/n))\cdot(1-(1/n+1)) = 1/n\cdot(1-(1/n+1)) = 1/n\cdot(n/n+1) = 1/n+1$ cvd

4. Si dimostri che il seguente enunciato è un teorema usando il metodo di Hilbert

$$(A \wedge B) \to (A \vee B)$$

	$\vdash (\neg B \to (A \to \neg B))$	Ax 1
$\{\neg A\}$	$\vdash (\neg(A \to \neg B) \to B)$	contr
	$\vdash \neg A \to (\neg(A \to \neg B) \to B)$	TD
	$\vdash \neg(A \to \neg B) \to (\neg A \to B)$	scambio
	$\vdash (A \wedge B) \to (A \vee B)$	def

5 . Si dimostri che la seguente formula è insoddisfacibile usando il metodo dei tableau

$$\exists z\, \forall x\, P(x,z) \wedge \forall z\, \exists x\, \neg P(x,z))$$
$$|\alpha$$
$$\exists z\, \forall x\, P(x,z),\ \forall z\, \exists x\, \neg P(x,z)$$
$$|\delta$$
$$\forall x\, P(x,a),\ \forall z\, \exists x\, \neg P(x,z)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\, P(x,a),\ \forall z\, \exists x\, \neg P(x,z),\ \exists x\, \neg P(x,a)$$
$$|\delta$$
$$\forall x\, P(x,a),\ \forall z\, \exists x\, \neg P(x,z),\ \neg P(b,a)$$
$$|\gamma$$
$$\forall x\, P(x,a),\ P(b,a),\ \forall z\, \exists x\, \neg P(x,z),\ \neg P(b,a)$$

Il tableau è chiuso, quindi la formula è insoddisfacibile.

6 Trovare, se possibile un modello per la formula di cui al punto 5.

Non esistono modelli per formule insoddisfacibili.