Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
Didattica blended

Esercizio risolto su equazioni di ricorrenza

Angelo Monti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

La **serie armonica** è data da $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots$

nonostante i termini siano via via decrescenti la serie diverge.

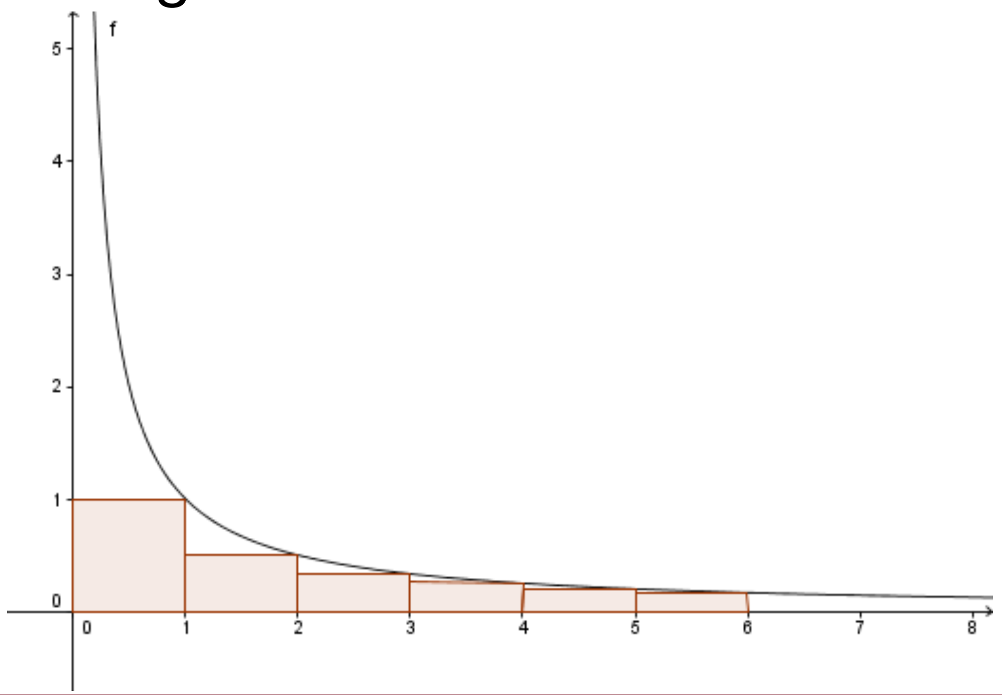
Non è nota una formula chiusa per le somme parziali della serie armonica:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

con i metodi del calcolo è però facile ottenere stime per difetto o per eccesso.

Quando una sommatoria può essere espressa come $\sum_{i=a}^{b} f(i)$ dove $f(i)$ è una funzione monotona non crescente la si può approssimare tramite integrali e vale:

$$\int_{a}^{b+1} f(x)dx \leq \sum_{i=a}^{b} f(i) \leq \int_{a-1}^{b} f(x)dx$$



$$\int_{a}^{b+1} f(x)dx \le \sum_{i=a}^{b} f(i) \le \int_{a-1}^{b} f(x)dx$$

Prova che $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \Theta(\log k)$**:**

- $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \ \ge \ \int_{1}^{k+1} \frac{1}{x}dx = 1 + \left[\ln\ x\right]_{1}^{k+1} = \ln(k+1) - \ln\ 1 \ge \ln(k+1) \ = \Omega(\log k)$
- $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i} \ \le \ 1 + \int_{1}^{k} \frac{1}{x}dx = 1 + \left[\ln\ x\right]_{1}^{k} = 1 + \ln k - \ln\ 1 = \ln k + 1 = O(\log k)$

$$\Omega(\log k) = \ln\ k \le \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \le \ln(k+1) = O(\log k)$$

Esercizio:
Risolvere la seguente equazione di ricorrenza con i quattro metodi visti a lezione se possibile

- $$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$$
- $T(1) = \Theta(1)$

1) Risolvere la seguente equazione con il metodo principale

- $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 2,\ b = 2$
- $f(n) = \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n = \Omega\left(\frac{n}{\log n}\right)$

Ora, $n = n^{log_b a}$ è asintoticamente più grande di *f(n)*=$\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$, ma non polinomialmente più grande. Infatti, $\frac{n}{\log n}$ risulta asintoticamente maggiore di n^c per qualunque valore di c < 1. e quindi per ogni costante ϵ si ha $f(n) \neq O(n^{1-\epsilon})$. Di conseguenza non possiamo applicare il metodo del teorema principale.

2) Risolvere la seguente equazione con il metodo iterativo

- $$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log\, n}\right)$$
- $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log\, n}\right) = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2^1 \log \frac{n}{2^1}}\right)\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log\, n}\right)$$

$$= 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log \frac{n}{2^1}}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log\, n}\right)$$

$$= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2^2 \log \frac{n}{2^2}}\right)\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log \frac{n}{2^1}}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log\, n}\right)$$

$$= 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log \frac{n}{2^2}}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log \frac{n}{2^1}}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log\, n}\right)$$

$$= \ldots\ldots$$

$$= 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \Theta\left(\frac{n}{\log \frac{n}{2^i}}\right)$$

Esercizio:

segue metodo iterativo per $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n/\log\ n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \Theta\left(\frac{n}{\log \frac{n}{2^i}}\right)$$

…(vado avanti finché $\frac{n}{2^k} = 1$ *cioè quando* $k = \log\ n$*)…*

$$= 2^{\log\ n} T(1) + \sum_{i=0}^{\log\ n-1} \frac{n}{\log \frac{n}{2^i}}$$

$$= \Theta(n) + n \sum_{i=0}^{\log\ n-1} \frac{1}{\log\ n - i} = \Theta(n) + n \sum_{j=1}^{\log\ n} \frac{1}{j} = \Theta(n) + \Theta(n \log \log n) = \Theta(n \log \log n)$$

dove ho usato la somma parziale della serie armonica : $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = \Theta(\log k)$

2) Risolvere la seguente equazione con il metodo di sostituzione

- $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$
- $T(2) = \Theta(1)$

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot \frac{n}{\log n}$ per qualche costante $c > 0$

$T(2) = d$ per qualche costante $d > 0$

Proviamo a dimostrare per induzione che la soluzione è $O(n \cdot \log \log n)$

assumiamo quindi che $T(n) \leq k \cdot n \cdot \log \log n,$ dove k è una costante da determinare.

Esercizio:

segue metodo di sostituzione per $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n/\log\ n)$ e $T(2) = \Theta(1)$

Vogliamo dimostrare per induzione che $T(n) \leq k \cdot n \cdot \log\log n + h$ dove k e h sono costanti da determinare.

Passo base. $T(2) = d \leq h$, che è verificata ad esempio per $h = d$.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot \frac{n}{\log n} \\
&\leq 2 \cdot k \cdot \frac{n}{2} \cdot \log\log\frac{n}{2} + h + c\frac{n}{\log\ n} \\
&\leq k \cdot n\left(\log\log\frac{n}{2} + \frac{c}{k}\frac{1}{\log\ n}\right) \text{+h} \\
&\leq k \cdot n\left(\log\log\frac{n}{2} + \frac{1}{\log\ n}\right) \text{+h che è vero se prendo } k \geq c \\
&\leq k \cdot n \cdot \log\log n \text{ +h}
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo passo segue perché non è difficile provare che per ogni $n > 2$ vale

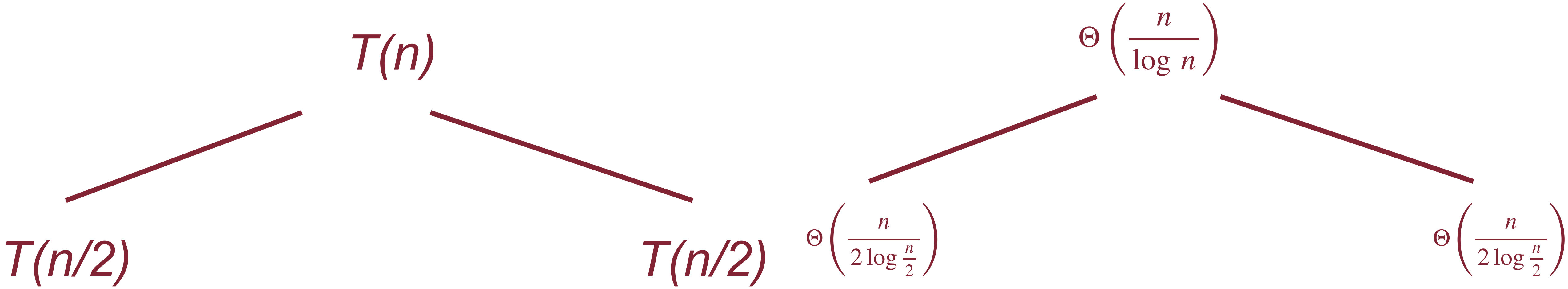
$$\log\log\frac{n}{2} + \frac{1}{\log\ n} < \log\log n\ .$$

Ne concludiamo che $T(n) = O(n\log\log\ n)$.

4) Risolvere la seguente equazione con il metodo dell’albero:

- $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$
- $T(2) = \Theta(1)$

La radice dell’albero dà un contributo di $\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$ ed ha 2 figli, tutti etichettati con *T(n/2),* che quindi danno ciascuno contributo $\Theta\left(\frac{n}{2\log\frac{n}{2}}\right)$ e così via. Schematizziamo dunque l’albero in questo modo:



Esercizio:

segue metodo dell'albero per $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n/\log\ n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Il contributo della generica riga i-esima dell'albero è dato dal valore su ciascuno dei suoi nodi, pari a $\Theta\left(\dfrac{n}{2^i \log \frac{n}{2^i}}\right)$, moltiplicato per il numero di nodi, cioè 2^i.

Considerato che le righe sono $\log\ n + 1$(da 0 a $\log\ n$), si ha:

Gli n nodi a livello $\log n$ (vale a dire le foglie) contribuiscono ciascuno per $\Theta(1)$.

Il loro contributo in totale è dunque $\Theta(n)$.

Il contributo dei nodi interni dell'albero è invece:

$$\sum_{i=0}^{\log\ n-1} 2^i \cdot \Theta\left(\frac{n}{2^i \log \frac{n}{2^i}}\right) = \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log\ n-1} \frac{n}{\log \frac{n}{2^i}}\right) = n\Theta\left(\sum_{i=0}^{\log\ n-1} \frac{1}{\log\ n - i}\right) = n\Theta\left(\sum_{j=1}^{\log\ n} \frac{1}{j}\right) = \Theta(n \log \log\ n)$$

pertanto avremo $T(n) = \Theta(n) + \Theta(n \log \log\ n) = \Theta(n \log \log\ n)$