Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
Didattica blended

Esercizio risolto su equazioni di ricorrenza

Angelo Monti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

- ricorda le seguenti forme chiuse per somme parziali della serie aritmetica, della serie geometrica e della serie aritmetico geometrica che è facilmente possibile dimostrare per induzione:
- dalla serie aritmetica:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} = \Theta(k^2)$$

- dalla serie geometrica:

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1} = \Theta(c^k) \qquad \text{con } c>1$$

- dalla serie aritmetico-geometrica:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot c^i = \frac{kc^{k+2}-(k+1)c^{k+1}+c}{(c-1)^2} = \Theta(kc^k) \quad \text{con } c>1$$

Esercizio: Risolvere la seguente equazione di ricorrenza con i quattro metodi visti a lezione

- $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

1) Risolvere la seguente equazione con il metodo principale

- $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log\, n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Possiamo applicare questo metodo perché la ricorrenza soddisfa le ipotesi del teorema; inoltre:

- $a = 3,\; b = 2$
- $f(n) = \Theta(n \log\, n)$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 3} = n^{1.58\cdots} = n^{1.08\ldots+\epsilon}$ con $\epsilon = \dfrac{1}{2}$

Poiché $f(n) = O\left(n^{1.08\cdots}\right) = O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right)$ siamo nel **caso 1**, da cui:

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) = \Theta\left(n^{1.58\cdots}\right)$$

2) Risolvere la seguente equazione con il metodo iterativo

- $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n) = 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2^1}\log\frac{n}{2^1}\right)\right) + \Theta(n \log n)$$

$$= 3^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 3 \cdot \Theta\left(\frac{n}{2^1}\log\frac{n}{2^1}\right) + \Theta(n \log n)$$

$$= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2^2}\log\frac{n}{2^2}\right)\right) + 3 \cdot \Theta\left(\frac{n}{2^1}\log\frac{n}{2^1}\right) + \Theta(n \log n)$$

$$= 3^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3^2\Theta\left(\frac{n}{2^2}\log\frac{n}{2^2}\right) + 3 \cdot \Theta\left(\frac{n}{2^1}\log\frac{n}{2^1}\right) + \Theta(n \log n)$$

$$= \ldots\ldots$$

$$= 3^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1}\Theta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^i n \log\frac{n}{2^i}\right)$$

Esercizio:

segue metodo iterativo per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = 3^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \Theta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^i n \log \frac{n}{2^i}\right)$$

…(vado avanti finché $\frac{n}{2^k} = 1$ *cioè quando* $k = \log n$*)…*

$$= 3^{\log_2 n} T(1) + \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \Theta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^i n(\log_2 n - i)\right)$$

$$= n^{\log_2 3}\Theta(1) + \Theta\left(n \log_2 n \sum_{i=0}^{\log_2 n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i - n \sum_{i=0}^{\log_2 n-1} i \left(\frac{3}{2}\right)^i\right)$$

$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(n \log_2 n \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) - n\left(\frac{(\log_2 n - 1)\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n+1} - \log_2 n \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} + \left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2}\right)$$

dove ho usato:

- *la serie geometrica:* $\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}}{c-1}$
- la serie aritmetico-geometrica: $\sum_{i=1}^{k} i \cdot c^i = \frac{kc^{k+2} - (k+1)c^{k+1} + c}{(c-1)^2}$

Esercizio:

segue metodo iterativo per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log\ n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(n\log_2 n \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) - n\left(\frac{(\log_2 n - 1)\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} - \log_2 n\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} + \left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2}\right)$$

$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(2n\log_2 n\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 2n\log_2 n - 4n(\log_2 n - 1)\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n + 1} + 4n\log_2 n\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n} - 4n\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(2n\log_2 n\frac{3^{\log_2 n}}{n} - 2n\log_2 n - 4n(\log_2 n - 1)\frac{3^{\log_2 n + 1}}{2n} + 4n\log_2 n\frac{3^{\log_2 n}}{n} - 6n\right)$$

$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(2\log_2 n 3^{\log_2 n} - 2n\log_2 n - 6(\log_2 n - 1)3^{\log_2 n} + 4\log_2 n 3^{\log_2 n} - 6n\right)$$

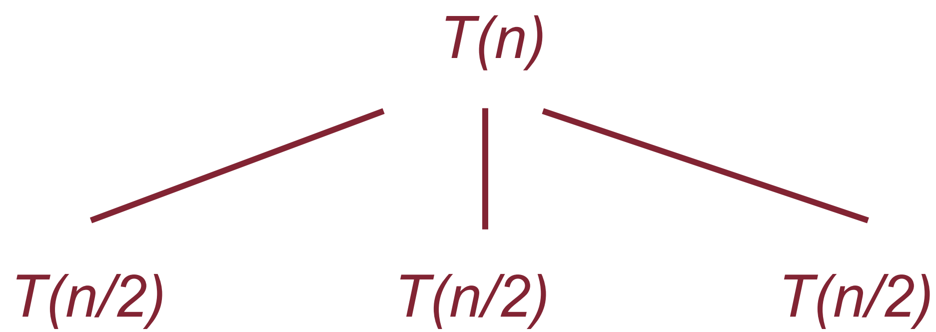
$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(-2n\log_2 n + 6 \cdot 3^{\log_2 n} - 6n\right)$$

$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) + \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) = \Theta\left(n^{\log_2 3}\right)$$

4) Risolvere la seguente equazione con il metodo dell'albero:

- $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log\, n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

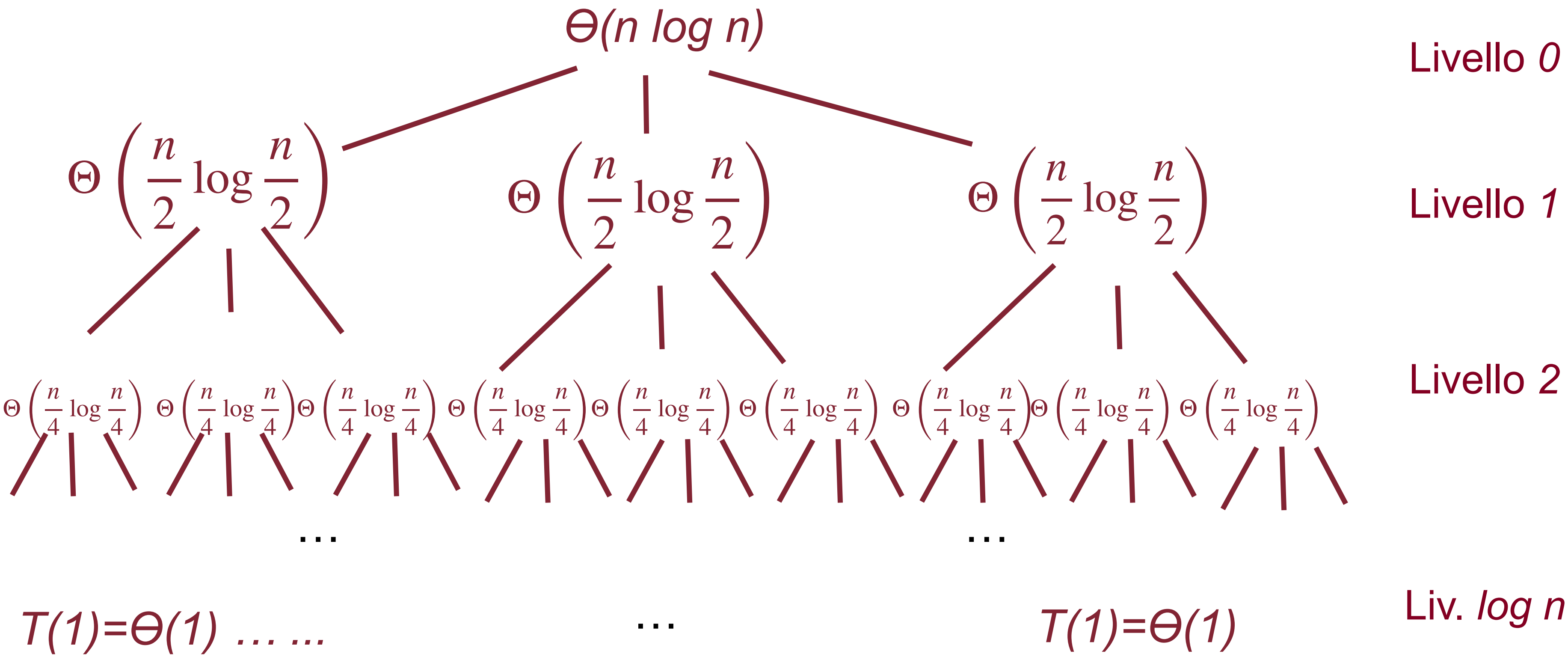
La radice dell'albero dà un contributo di $\Theta(n \log\, n)$ ed ha tre figli, tutti etichettati con *T(n/2),* che quindi danno ciascuno contributo $\Theta\left(\frac{n}{2} \log \frac{n}{2}\right)$ e così via. Schematizziamo dunque l'albero in questo modo:



Esercizio:

segue metodo dell'albero per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Iterando il procedimento otteniamo questo albero, nel quale numeriamo i livelli da 0 (radice) a $\log n$:



Esercizio:

segue metodo dell'albero per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Il contributo della generica riga i-esima dell'albero è dato dal valore su ciascuno dei suoi nodi, pari a $\Theta\left(\frac{n}{2^i}\log\frac{n}{2^i}\right)$, moltiplicato per il numero di nodi, cioè 3^i.

Considerato che le righe sono $\log n + 1$(da 0 a $\log n$), si ha:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} \Theta\left(\frac{n}{2^i}\log\frac{n}{2^i}\right)3^i = \Theta\left(n\sum_{i=0}^{\log n}\left(\frac{3}{2}\right)^i \log\frac{n}{2^i}\right) = \Theta(n^{\log_2 3})$$

3) Risolvere la seguente equazione con il metodo di sostituzione

- $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

Dobbiamo innanzi tutto eliminare la notazione asintotica, quindi l'equazione diventa:

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n \log n$ per qualche costante $c > 0$

$T(1) = d$ per qualche costante $d > 0$

Proviamo a dimostrare per induzione che la soluzione è $\Omega(3^{\log_2 n})$

assumiamo quindi che $T(n) \geq k \cdot 3^{\log_2 n}$, dove k è una costante da determinare.

Esercizio:

segue metodo di sostituzione per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log\ n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Vogliamo dimostrare per induzione che $T(n) \geq k \cdot 3^{\log_2 n}$, dove k è una costante da determinare.

Passo base. $T(1) = d \geq k$, che è verificata ad esempio per $k = d$.

Passo induttivo. Sostituendo nell'equazione generica otteniamo:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n \log n \\
&\geq 3 \cdot k \cdot 3^{\log_2 \frac{n}{2}} + c \cdot n \log n \\
&= 3 \cdot k \cdot 3^{\log_2 n - 1} + c \cdot n \log n \\
&= k \cdot 3^{\log_2 n} + c \cdot n \log n \\
&\geq k \cdot 3^{\log_2 n}
\end{aligned}
$$

che è vera per ogni k. Ne concludiamo che

$$T(n) = \Omega(n \log\ n).$$

Esercizio:

segue metodo di sostituzione per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Per quanto riguarda la maggiorazione, dobbiamo provare $T(n) = O(n^{log_2 n})$ e possiamo usare $T(n) \leq k \cdot 3^{\log_2 n} - h \cdot n \log n$ per due costanti k e h da stabilire.

Passo base. $T(1) = d \leq k$ che è vera per $k \geq d$.
Passo induttivo. Sostituendo l'ipotesi induttiva nell'equazione otteniamo:

$$T(n) \leq 3\left(k \cdot 3^{\log_2 \frac{n}{2}} - h \cdot \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}\right) + cn \log n$$

$$= 3 \cdot k \cdot 3^{\log_2 n - 1} - 3 \cdot h \cdot \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + cn \log n$$

$$= k \cdot 3^{\log_2 n} - h \cdot n \log n - h\frac{n}{2} \log n + 3 \cdot h\frac{n}{2} + cn \log n$$

$\leq k \cdot 3^{\log_2 n} - hn \log n$ *questa ultima diseguaglianza è vera quando*

$$-h\frac{n}{2} \log n + 3 \cdot h\frac{n}{2} + cn \log n \leq 0$$

che ad esempio è verificata per $h = 16c$ *e* $n \geq 16$

Esercizio:

segue metodo di sostituzione per $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n \log\ n)$ e $T(1) = \Theta(1)$

Mettendo insieme le due notazioni asintotiche trovate, e cioè $T(n) = \Omega(3^{\log_2 n})$ e $T(n) = O(3^{\log_2 n})$, si deduce che :

$$T(n) = \Theta(3^{\log_2 n}) = \Theta(n^{\log_2 3}).$$