Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
Didattica blended

Dizionari: Intoduzione

Angelo Monti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

Dizionari

Un ***dizionario*** è una struttura dati che permette di gestire un insieme dinamico di dati, che di norma è un *insieme totalmente ordinato*, tramite queste tre sole operazioni:

- ***insert***: si inserisce un elemento;
- ***search***: si ricerca un elemento;
- ***delete***: si elimina un elemento.

Dizionari

Fra le strutture dati che abbiamo descritto, quelle che supportano in modo semplice (anche se non efficiente) tutte queste tre operazioni sono i vettori, le liste e le liste doppie e gli alberi.

- le code (con o senza priorità, inclusi gli heap) e le pile non consentono né la ricerca né l'eliminazione di un elemento arbitrario.
- realizzare ad esempio un dizionario con un vettore ordinato permetterà di ricercare in tempo $O(\log n)$ e inserire e cancellare in tempo $O(n)$.

Quando l'esigenza è quella di realizzare un dizionario, ossia una struttura dati che rispetti la definizione data sopra, si ricorre quindi a soluzioni specifiche.

la prima è l'albero binario di ricerca bilanciato: come abbiamo visto le tre operazioni con questa struttura richiedono tempo $O(\log n)$.

Qui di seguito illustreremo altre due diverse implementazioni:

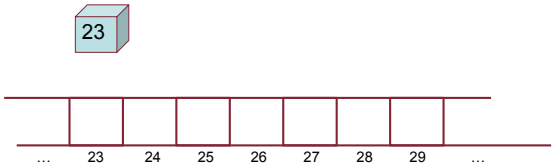
- tabelle ad indirizzamento diretto;
- tabelle hash;

Assunzioni e nomenclatura:

- Supponiamo di dover gestire un insieme dinamico i cui elementi abbiano una chiave in $U = \{0,1,\ldots m-1\}$: insieme (U è detto insieme universo)
- assumiamo pure che due elementi non possono avere la stessa chiave.

Tabelle ad indirizzamento diretto

Sotto le ipotesi appena viste viene naturale rappresentare il dizionario tramite un vettore ad indirizzamento diretto $V[0, 1, \ldots m-1]$ in cui ogni posizione corrisponde ad una chiave dell'universo U.



Abbiamo così una corrispondenza biunivoca tra le chiavi e le posizioni del vettore.

Tabelle ad indirizzamento diretto

E' un'implementazione naturale e di grande efficienza. Infatti, tutte e tre le operazioni hanno costo computazionale $\Theta(1)$:

```
def Insert_ID(V, k):
    V[k] = dati dell'elemento di chiave k


def Search_ID(V, k):
    return V[k]

def Delete_ID(V, k):
    V[k] = None
```

Tabelle ad indirizzamento diretto

Purtroppo le cose non sono così semplici nel caso dei problemi reali, poiché:

- l'insieme U può essere enorme, tanto grande da rendere impraticabile l'allocazione in memoria di un vettore V di sufficiente capienza;
- il numero delle chiavi effettivamente utilizzate può essere molto più piccolo di $|U|$: in tal caso vi è un rilevante spreco di memoria, in quanto la maggioranza delle posizioni del vettore V resta inutilizzata.

Tabelle ad indirizzamento diretto

Ad esempio, si pensi al caso dei Codici Fiscali.

Un CF è costituito da 8 lettere (più una lettera di controllo) e 7 cifre. Considerando un alfabeto di 26 lettere si hanno:

$$|U| = 26^8 \cdot 10^7 \approx 2 \cdot 10^{18}$$

Mentre ci sono meno di $n = 6 \cdot 10^6$ cittadini. Anche considerando che non tutte le lettere e le cifre vengono usate in ogni posizione, la sproporzione è enorme.

In sostanza:

L'indirizzamento diretto è una tecnica semplice che funziona bene quando l'universo U delle chiavi è ragionevolmente piccolo ed il numero n di elementi da memorizzare è vicino al numero m delle possibili chiavi.

Perciò, si ricorre spesso a differenti implementazioni dei dizionari.

Tabelle ad indirizzamento diretto

Lo spazio allocato è indipendente dal numero di elementi effettivamente memorizzati e se le chiavi effettive sono molte di meno delle chiavi potenziali c'è un notevole spreco di spazio.

Possiamo misurare il grado di riempimento di una tabella introducendo il fattore di carico

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

Dove m è la dimensione della tabella mentre n è la parte effettivamente utilizzata dalle chiavi. Ad esempio, si pensi al caso di 100 studenti memorizzati tramite la loro matrice a 6 cifre si avrebbe

$$\alpha = \frac{100}{10^6} = 0{,}0001.$$

con enorme spreco di spazio.

L'uso di tabelle hash consente di ottenere un buon compromesso tra tempo necessario alle operazioni e memoria:

memoria richiesta: $\Theta(n)$

tempo di ricerca: $\Theta(1)$ **ma nel caso medio e non in quello pessimo**

Tabelle hash

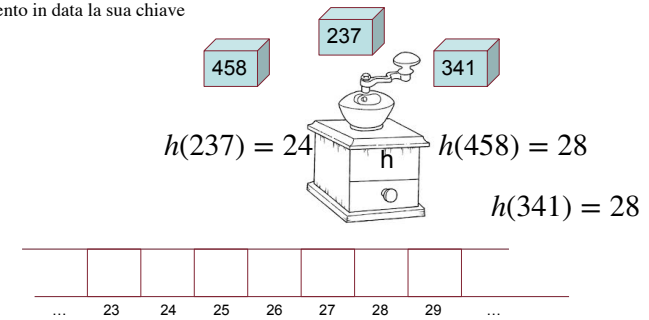
Dimensionare la tabella in base al numero di elementi attesi (che indicheremo con m) ed utilizzare una speciale funzione (funzione hash) per indicizzare la tabella

Una funzione hash è una funzione che data una chiave x restituisce la posizione della tabella in cui l'elemento con chiave x viene memorizzato:

$$h(x) \in \{0,1,\ldots m-1\}$$

la dimensione m della tabella può non coincidere con la |U|, anzi in generale $m << |U|$

L'idea è quella di definire una funzione d'accesso che permetta di ottenere la posizione di un elemento in data la sua chiave



Vantaggi: riduciamo lo spazio necessario per memorizzare la tabella

Svantaggi:

- perdiamo la corrispondenza tra chiavi e posizioni in tabella
- le tabelle hash possono soffrire del fenomeno delle **collisioni**

Tabelle hash

Vi si ricorre quando l'insieme U dei valori che le chiavi possono assumere è molto grande e l'insieme K delle chiavi da memorizzare effettivamente è invece molto più piccolo di U.

Idea: utilizzare di nuovo un vettore di m posizioni, ma questa volta non è possibile mettere in relazione direttamente la chiave con l'indice corrispondente, poiché le possibili chiavi sono molte di più rispetto agli indici.

Allora si definisce una opportuna funzione h, detta ***funzione hash***, che viene utilizzata per calcolare la posizione di un elemento sulla base del valore della sua chiave.

$$h : U \to \{0,\ m-1\}$$

Problema: anche se le chiavi da memorizzare sono meno di m, non si può escludere che due chiavi $k_1 \neq k_2$ siano tali per cui $h(k_1) = h(k_2)$, ossia che la funzione hash restituisca lo stesso valore per entrambe le chiavi, che quindi andrebbero memorizzate nella stessa posizione della tabella.

Tale situazione viene chiamata ***collisione***, ed è un fenomeno che va evitato il più possibile e, altrimenti, risolto.

Tabelle hash

Una buona funzione hash deve essere in grado di distribuire uniformemente le chiavi nello spazio degli indici $\{0,1\ldots,m-1\}$.

La situazione ideale è quella in cui ciascuna delle m posizioni della tabella è scelta con la stessa probabilità, ipotesi che viene detta ***uniformità semplice della funzione hash***.

Usando una funzione hash che gode dell'uniformità semplice ogni cella ha la stessa probabilità di essere usata cioè non ci sono fenomeni di agglomerazione dove più chiavi tendono a collidere su alcune celle più che su altre.

Tabelle hash

Un metodo semplicissimo per definire una funzione hash è quello della divisione:

$$h(k) = k \mod m.$$

Nella maggior parte dei casi questo metodo da buoni risultati ma vi sono situazioni in cui si può essere particolarmente sfortunati:

se l'universo fosse composto da chiavi che sono tutte multipli di m si avrebbe $h(k) = 0$ per ogni chiave k e tutte le chiavi collide rebbero nella stessa cella, tutto il contrario dell'uniformità semplice che vorremmo avere.

Tabelle hash

Non vogliamo discutere qui come ottenere una funzione hash con l'ipotesi di uniformità semplice.

Partiamo, invece, dalla constatazione che le collisioni possono avvenire (anche se cerchiamo di renderle il più improbabili possibile!).

Infatti, per quanto bene sia progettata la funzione hash, è impossibile evitare del tutto le collisioni perché se $|U| > m$ è inevitabile che esistano chiavi diverse che producono una collisione.
Dobbiamo, quindi, risolverle.

Tabelle hash e collisioni.

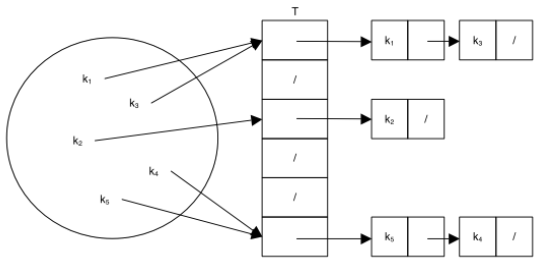
Esistono diverse tecniche per risolvere le collisioni in una tabella hash.

Nei lucidi che seguono illustreremo i due metodi più diffusi per la gestione delle collisioni:

- **liste di trabocco**
- **indirizzamento aperto**

Liste di trabocco

ad ogni cella della tabella di hash si fa corrispondere invece di un elemento, una Lista (solitamente una lista concatenata) detta **lista di trabocco**. In questo modo un elemento che collide viene aggiunto alla lista corrispondente all'indice ottenuto.



Liste di trabocco, operazioni elementari (INSERIMENTO)

```
def  Insert_LT(T, x):
  #inserisci x nella lista puntata da T[h(chiave(x))]
```

Costo computazionale: $\Theta(1)$, anche nel caso peggiore, con l'inserzione in testa alla lista.

Liste di trabocco, operazioni elementari (RICERCA)

```
def  Search_LT(T, k):
    ricerca k nella lista di trabocco puntata da T[h(k)]
    if k è presente:
        return puntatore all'elemento contenente k
    else:
        return None
```

Costo computazionale:

O(lunghezza della lista puntata da T[h(k)])

il che, nel **caso peggiore**, diviene $O(n)$ quando tutti gli n elementi memorizzati nella tabella hash mappano nella medesima posizione, ma nel **caso medio** (quando la funzione hash gode di uniformità semplice) è $O\left(1+\frac{n}{m}\right) = O(1+\alpha)$

dove con α indichiamo il ***fattore di carico*** della tabella.

Nota che le tabelle hash con liste di trabocco sono un ottimo esempio di bilanciamento spazio-tempo:

- **per** $m = 1$ tutte le n chiavi sono in una sola lista e la tabella diventa un unica lista a ricerca sequenziale che richiede tempo $T(n) = O(n)$ e spazio $O(n)$
- **per** $m = |U|$ possiamo usare una funzione hash perfetta ottenendo $T(n) = O(1)$ ma spazio $O(|U|)$.
- **per** $1 \le m \le |U|$, se la funzione hash gode di uniformità semplice allora abbiamo $T(n) = O\left(1+\frac{n}{m}\right)$ e spazio $O(m+n)$.

Liste di trabocco, operazioni elementari (CANCELLAZIONE)

```
def Delete_ListeTrabocco (T, x)
   cancella x dalla lista puntata da T[h(chiave(x))]
```

Costo computazionale: dipende dall'implementazione delle liste di trabocco e valgono, pertanto, tutte le osservazioni fatte per il costo dell'operazione di cancellazione nelle liste.

con liste semplici richiede lo stesso tempo della ricerca

Indirizzamento aperto

Questa tecnica prevede di inserire tutti gli elementi direttamente nella tabella, senza far uso di strutture dati aggiuntive.

Essa è applicabile quando:

$n \le m$ (quindi per il fattore di carico si ha sempre $\alpha \le 1$)

Supponiamo di voler inserire una chiave k e che la sua posizione "naturale" $h(k)$ sia già occupata. L'indirizzamento aperto consiste nell'occupare un'altra cella vuota, anche se essa potrebbe spettare di diritto ad un'altra chiave

Nota che in questo modo si usa meno memoria perché non c'è bisogno di puntatori.

Indirizzamento aperto

Idea: invece di seguire dei puntatori, calcoliamo (nei modi che vedremo fra breve) la sequenza delle posizioni da esaminare.

La funzione hash H dipende ora da 2 parametri: la chiave *k* e il numero di collisioni già trovate.

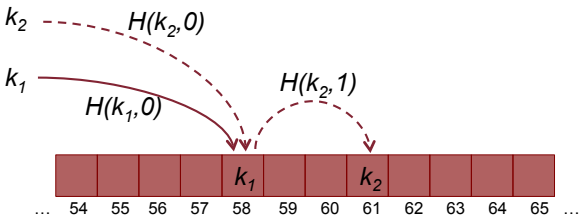
$$H : (U, i) \rightarrow \{0,\ m-1\} \qquad i = 0,1,\ldots,m-1$$

Nota che la sequenza prodotta da H sui valori $0 \leq i < m$ deve contenere tutti gli indici $\{0,\ m-1\}$ in modo da garantire che, se esiste una cella vuota, il metodo prima o poi la considera.

Indirizzamento aperto, operazioni elementari (Inserimento)

Se la posizione iniziale relativa alla chiave k è occupata, si scandisce la tabella fino a trovare una posizione libera nella quale l'elemento con chiave k può essere memorizzato.

La scansione è guidata dalla sequenza ben determinata: $H(k,0),\ H(k,1),\ \ldots,\ H(k,m-1)$.



Indirizzamento aperto, operazioni elementari (Inserimento)

esistono diverse tecniche di scansione. Le piu' utilizzate sono ispezione lineare, ispezione quadratica e doppio hashing,

Ispezione lineare:

$$H(k,i) = (h(k)+i) \mod m \qquad i = 0,1,\ldots,m-1$$

in pratica quando si incontra una collisione non si fa altro che utilizzare l'indice successivo a quello che collide sino a che non si trovi una casella libera.

Doppio hashing: (si utilizzano due funzioni hash**)**

$$H(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \mod m, \qquad i = 0,1,\ldots,m-1$$

Per assicurare che la sequenza $H(k,i)$ contenga tutti gli indici è necessario che m e $h_2(k)$ siano primi tra loro. Ad esempio possiamo scegliere:

- m primo,
- $h_1(k) = k \mod m$
- $h_2(k) = (k \mod (m-1)) + 1$

La bontà di questo metodo risiede nel fatto che, se le due funzioni sono ben progettate, è estremamente improbabile che due chiavi $k_1 \neq k_2$ producano una collisione su *entrambe* le funzioni hash (nel qual caso le due chiavi scandirebbero l'intera tabella nello stesso modo, situazione indesiderabile).

Indirizzamento aperto, operazioni elementari (ricerca)

L'operazione di **ricerca** è simile a quella di inserimento.

Se durante la scansione delle celle viene trovata una cella che contiene la chiave l'operazione restituisce l'elemento trovato. Se invece si arriva ad una cella vuota o si è scandita senza successo tutta la tabella si restituisce $None$.

Indirizzamento aperto, operazioni elementari (Cancellazione)

La prima cosa che verrebbe in mente è quella di marcare con $None$ la cella dell'array che contiene la chiave. **Così facendo la ricerca non sarebbe più corretta** infatti la ricerca potrebbe interrompersi prima di trovare l'elemento cercato per via di un "buco" creato dalla cancellazione (in pratica potrebbe accadere che un elemento present e in tabella non venga trovato).

Idea: marchiamo le celle che hanno subito cancellazione con un valore speciale $canc$. L'inserimento considererà le celle marcate $canc$ come vuote mentre una ricerca le oltrepasserà.

Operazione di cancellazione in definitiva è del tutto simile alla ricerca, l'unica differenza è che una volta trovata la cella da liberare la cella viene posta al valore speciale $canc$.

Analisi del costo di scansione

Sebbene usando l'indirizzamento aperto la scansione per la ricerca di un elemento ha tempo O(n) nel caso peggiore, nel caso medio le cose vanno molto meglio.

Se le chiavi associate agli n elementi della tabella hash di m celle sono prese dall'universo U con probabilità uniforme, allora il numero medio di passi richiesto dall'operazione di ricerca (contando in n anche le celle marcate $canc$) è:

Esito ricerca	Scansione lineare	Hashing doppio / Scansione quadratica
Chiave trovata	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2-2\alpha}$	$\frac{-\log_e(1-\alpha)}{\alpha}$
Chiave non trovata	$\frac{1}{2}+\frac{1}{(2-2\alpha)^2}$	$\frac{1}{1-\alpha}$

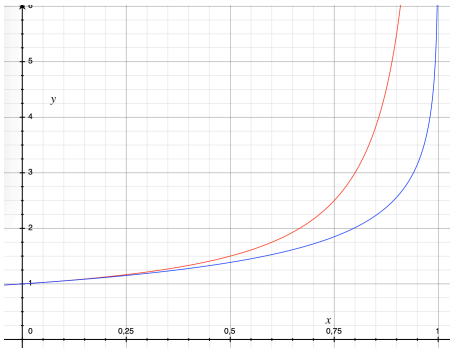
ricorda che è il fattore di carico della tabella: $\alpha = \frac{n}{m} < 1$

Nota che se solo una frazione della tabella è riempita e quindi $0 \leq \alpha < 1$ abbiamo che nel caso medio la ricerca richiede tempo costante.

Ricerca con successo:

$y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2(1-x)}$ **scansione lineare**

$y = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ **hashing doppio**



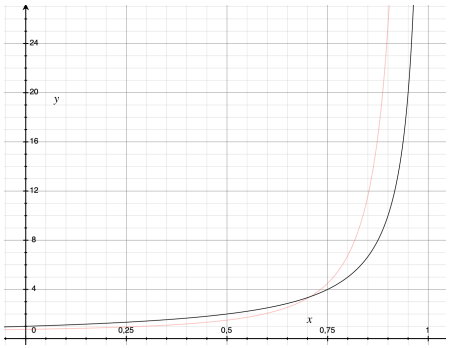
Ad esempio:

- se la tabella è piena al 50% il numero di passi atteso per una ricerca con successo è 1.5 per la scansione lineare e 1.3 per l'hashing doppio
- se la tabella è piena al 90% il numero di passi atteso per una ricerca con successo è 5.5 per la scansione lineare e 2.55 per l'hashing doppio.

Ricerca con insuccesso:

$y = \frac{1}{2}+\frac{1}{4(1-x)^2}$ **scansione lineare**

$y = \frac{1}{1-x}$ **hashing doppio**



Ad esempio:

- se la tabella è piena al 50% il numero di passi atteso per una ricerca con insuccesso è 1.5 per la scansione lineare e 2 per l'hashing doppio
- se la tabella è piena al 90% il numero di passi atteso per una ricerca con insuccesso è 26 per la scansione lineare e 10.5 per l'hashing doppio.

Analisi dei costi delle tre operazioni:

Esito ricerca	Scansione lineare	Hashing doppio / Scansione quadratica
Chiave trovata	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2-2\alpha}$	$\frac{-\log_e(1-\alpha)}{\alpha}$
Chiave non trovata	$\frac{1}{2} + \frac{1}{(2-2\alpha)^2}$	$\frac{1}{1-\alpha}$

- Il costo dell'inserimento è al più quello di una ricerca nel caso di insuccesso.
- Il costo della cancellazione è dominato dal costo della ricerca della chiave da cancellare ed ha quindi lo stesso costo di una ricerca.

Possiamo concludere che: **se solo una frazione della tabella è riempita, il tempo medio richiesto da ogni operazione di ricerca, cancellazione o inserimento è $O(1)$.**