Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
Didattica blended

Strutture dati fondamentali: Alberi

Angelo Monti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

Alberi (1)

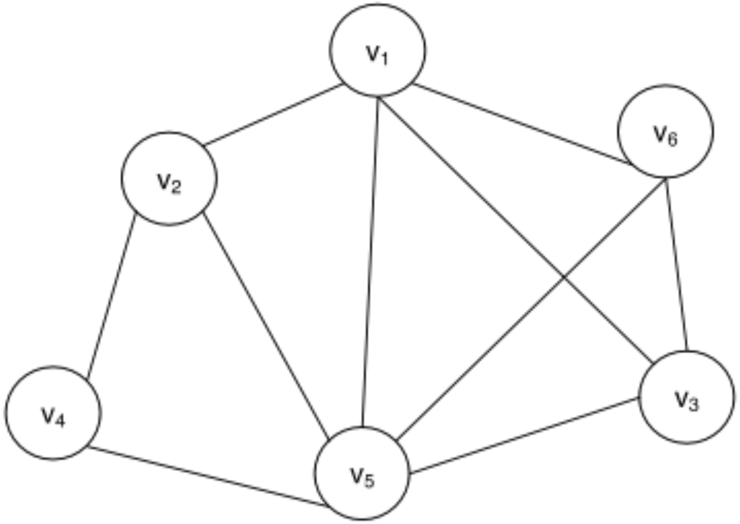
- L'*albero* è una struttura dati estremamente versatile, utile per modellare una grande quantità di situazioni reali e progettare le relative soluzioni algoritmiche.
- Abbiamo già incontrato la struttura ad albero (in particolare ad albero binario) varie volte, ma l'abbiamo sempre considerata in modo intuitivo.

Alberi (2)

Per dare la definizione formale di albero è necessario prima fornire alcune definizioni relative ad un'altra struttura dati, il ***grafo***:

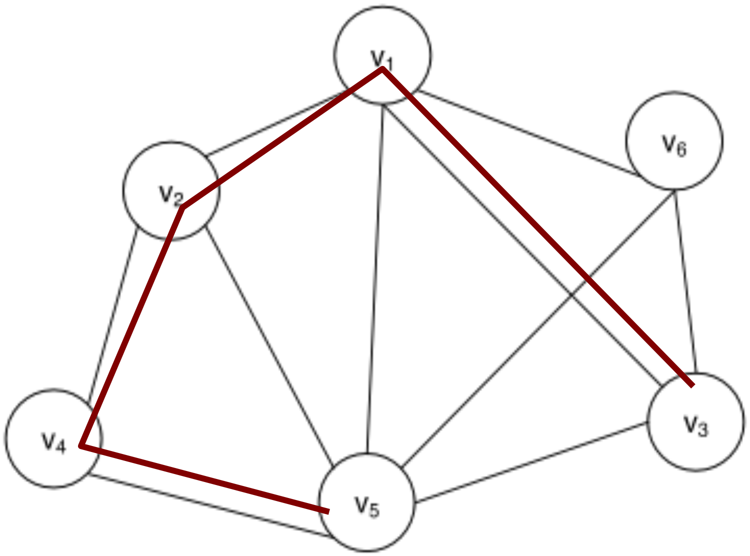
Un ***grafo*** $G = (V, E)$ è costituito da una coppia di insiemi:

- un insieme finito V dei ***nodi***, o ***vertici***;
- un insieme finito $E \subseteq V \times V$ di ***coppie non ordinate di nodi***, dette ***archi*** o ***spigoli***.



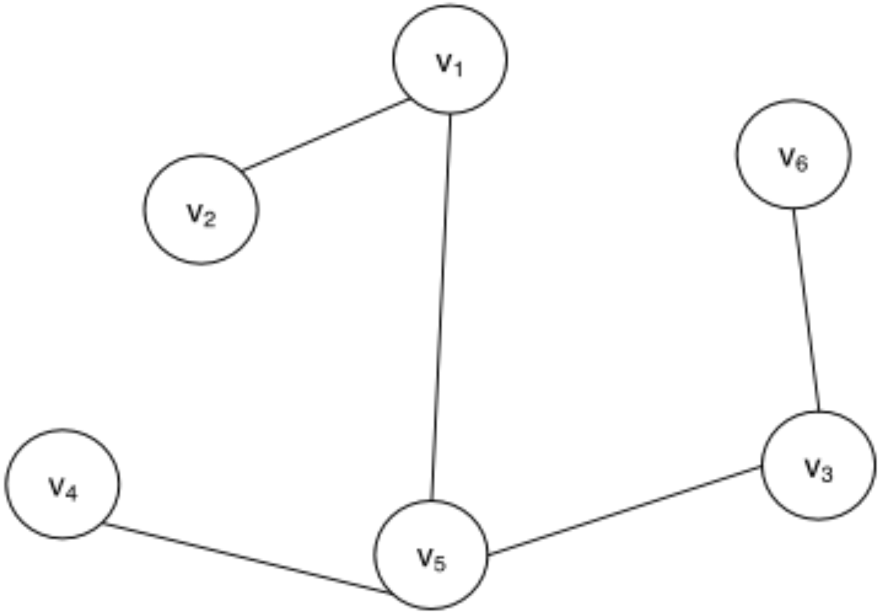
Alberi (3)

- Un ***cammino*** in un grafo $G = (V, E)$ è una sequenza $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ di nodi distinti di V tale che (v_i, v_{i+1}) sia un arco di E per ogni $1 \leq i \leq k - 1$.
- Se nel cammino $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ i nodi v_k e v_1 coincidono, si parla di ***ciclo***.
- Un grafo G è ***connesso*** se, per ogni coppia di nodi u e v, esiste un cammino tra u e v. Un grafo G è ***aciclico*** se non contiene cicli.



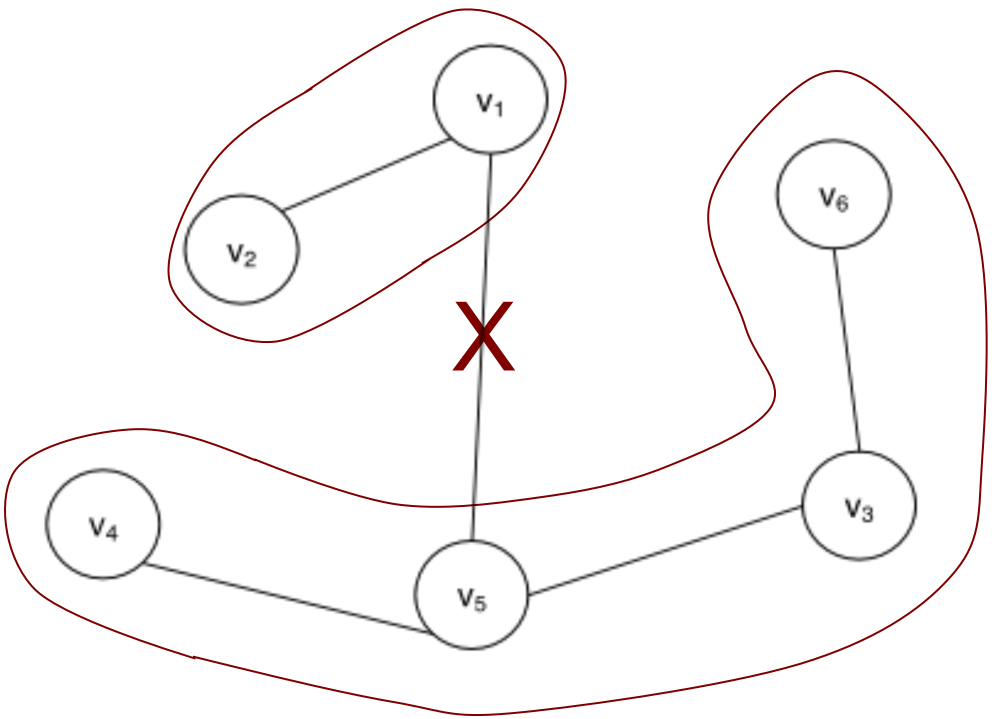
Alberi (4)

Definzione. *Un albero è un grafo* $G = (V, E)$ *connesso e aciclico.*



Alberi (5)

Lemma. *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso aciclico; eliminando da G un arco qualsiasi, G si disconnette, cioè si suddivide in due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, entrambi connessi e aciclici.*

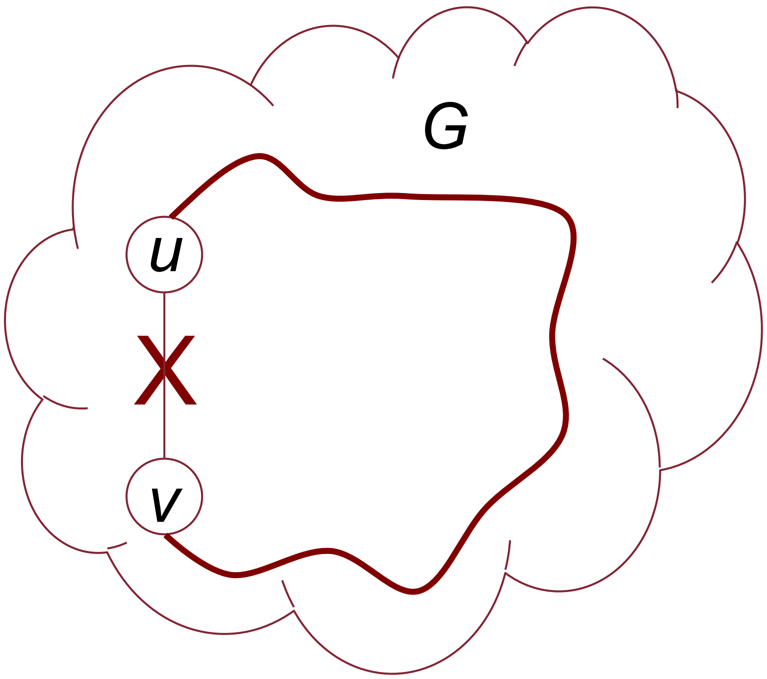


Alberi (6)

Dimostrazione. Per assurdo, dopo l'eliminazione dell'arco $e = (u, v)$ il grafo rimane connesso.

Cioè, nel nuovo grafo esiste un cammino da u a v.

Ma allora, nel grafo originario G, tale cammino, con *e*, forma un ciclo, contro l'ipotesi che G sia aciclico.



Infine, banalmente entrambe le componenti generatesi devono rimanere connesse e acicliche.

Caratterizzazione per gli alberi (1)

Teorema. *Sia $G = (V, E)$ un grafo. Le seguenti due affermazioni sono equivalenti:*

1. G è connesso e aciclico (in altre parole, G è un albero).
2. G è connesso ed $|E| = |V| - 1$.

Dim. **1.** $\Rightarrow$ **2.** Dimostreremo per induzione che, se G è connesso e aciclico, allora $|E| = |V| - 1$.

Passo base: se $|V| = 1$ oppure $|V| = 2$ l'affermazione è banalmente vera.

…

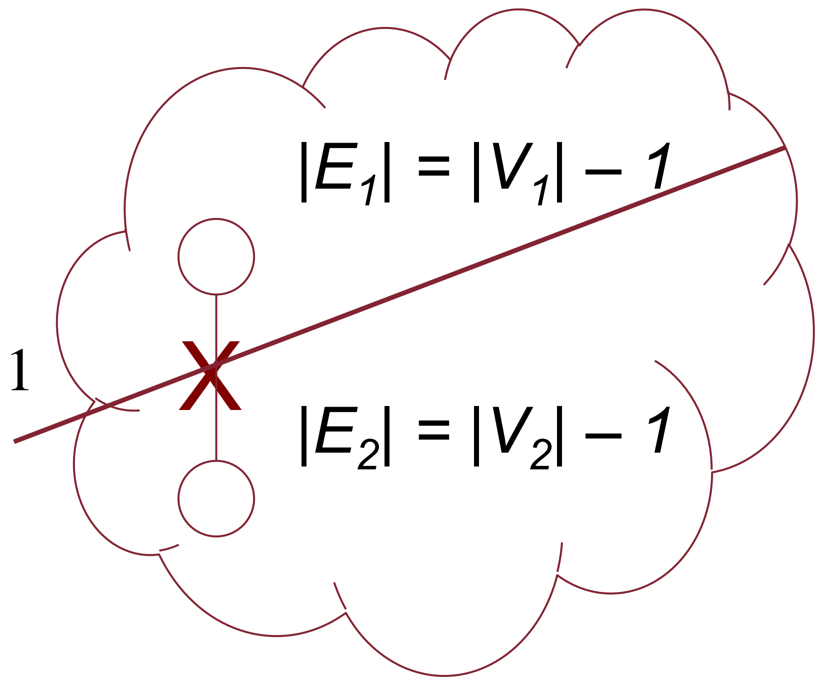
Caratterizzazione per gli alberi (2)

segue dim. *G* è connesso e aciclico $\Rightarrow$ *G* è connesso ed $|E| = |V| - 1$.

Passo induttivo: rimuovendo un arco qualsiasi, per il lemma provato precedentemente, il grafo *G* si disconnette in due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, entrambi connessi e aciclici.

Per essi vale l'hp induttiva:

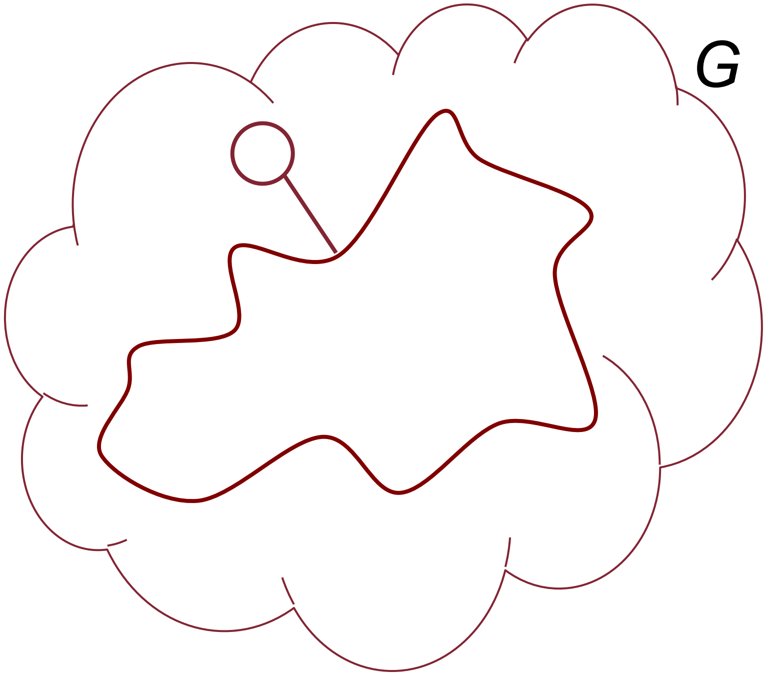
- $|V| = |V_1| + |V_2|$
- $|E| = |E_1| + |E_2| + 1$
  $= |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + 1 = |V| - 1$



Caratterizzazione per gli alberi (3)

segue dim. G è connesso ed $|E| = |V| - 1 \Longrightarrow G$ è connesso e aciclico

2. $\Rightarrow$ **1.** $G = (V, E)$ connesso, con $|V| = n$ e con $|E| = |V| - 1$
per assurdo contenga un ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$.
Consideriamo il grafo $G_k = (V_k, E_k)$ costituito dal solo ciclo.
In esso abbiamo: $|E_k| = |V_k|$

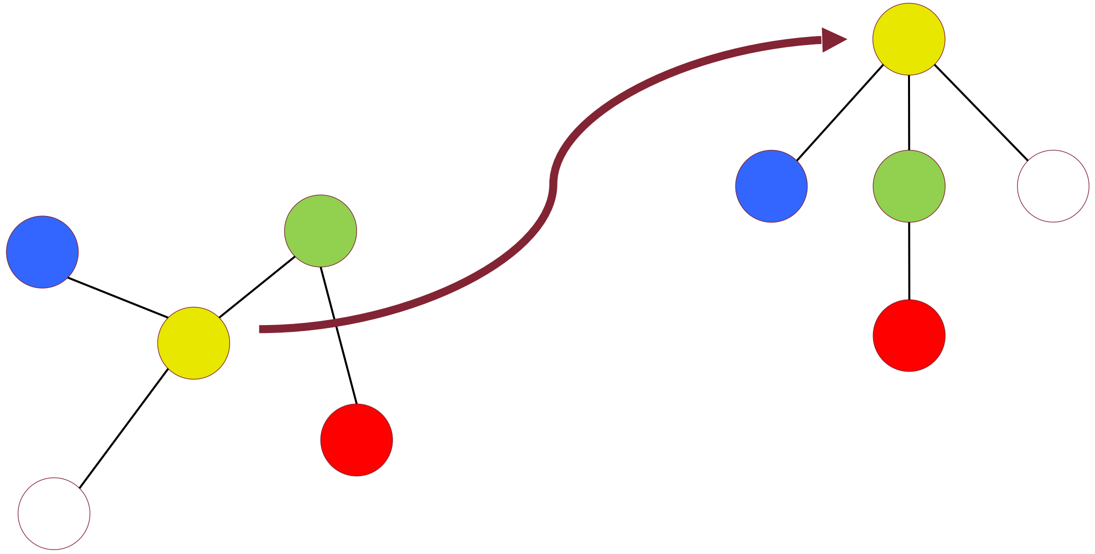


Se $k < n$ esiste un nodo v_{k+1} connesso a G_k tramite un arco, se lo inserisco nel grafo G_k ottengo un nuovo grafo G_{k+1} con $|E_{k+1}| = |V_{k+1}|$.
Si prosegue fino ad ottenere G_n per cui
$|V_n| = |E_n| \Longrightarrow |E_n| = n$
Ma per ipotesi $|E| = n - 1$, per cui per cui si ha l'assurdo $|E_n| > |E|$

Alberi radicati (1)

Alberi radicati: vi si distingue un nodo particolare tra gli altri, detto ***radice***.

L’albero radicato si può rappresentare in modo tale che i cammini da ogni nodo alla radice seguano un percorso dal basso verso l’alto, come se l’albero venisse, in qualche modo, “appeso” per la radice.



Alberi radicati (2)

In un albero radicato:

- i nodi sono organizzati in ***livelli***, numerati in ordine crescente allontanandosi dalla radice (di norma la radice è posta a livello zero),

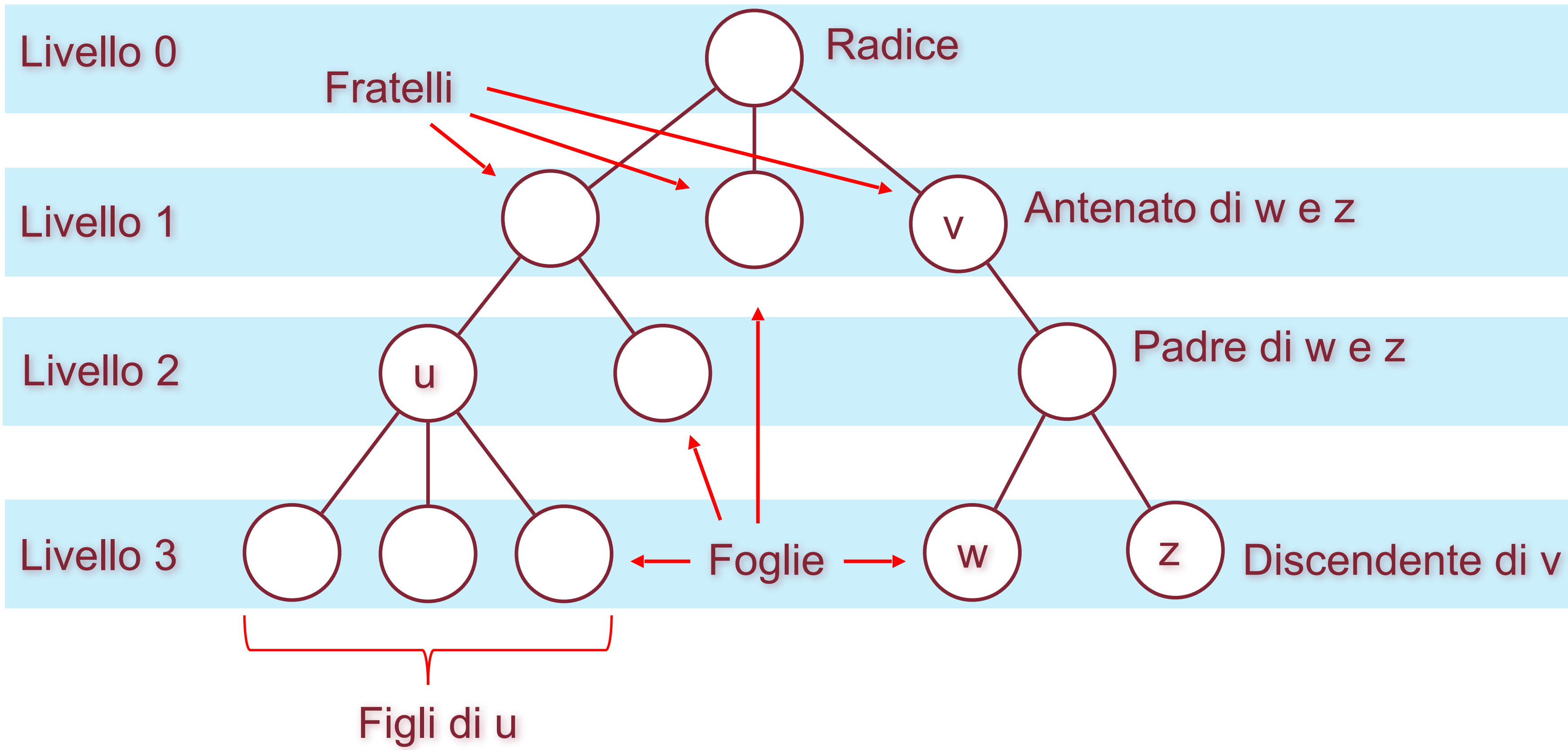
- l'***altezza*** di un albero radicato è la lunghezza del più lungo cammino dalla radice ad una foglia; un albero di altezza h contiene $h + 1$ livelli, di norma numerati *da* 0 *ad* h.

Alberi radicati (3)

In un albero radicato:

- Dato un qualunque nodo v che non sia la radice, il primo nodo che si incontra sul (unico) cammino da *v* alla radice viene detto ***padre di*** v***,***
- nodi che hanno lo stesso padre sono detti ***fratelli*** e la radice è l'unico nodo che non ha padre,
- ogni nodo sul cammino da v alla radice viene detto ***antenato di*** v***,***
- tutti i nodi che ammettono v come padre sono detti ***figli di*** v, ed i nodi che non hanno figli sono detti ***foglie,***
- tutti i nodi che ammettono v come antenato vengono detti ***discendenti di*** v.

Alberi radicati (esempio, $h = 3$)



Alberi radicati (4)

Un albero radicato si dice ***ordinato*** se attribuiamo un qualche ordine ai figli di ciascun nodo, nel senso che se un nodo ha k figli, allora vi è un figlio che viene considerato primo, uno che viene considerato secondo, …, uno che viene considerato k-esimo.

Una particolare sottoclasse di alberi radicati e ordinati è quella degli ***alberi binari***, che hanno la particolarità che ogni nodo ha al più ***due figli***. Poiché sono alberi ordinati, i due figli di ciascun nodo si distinguono in ***figlio sinistro*** e ***figlio destro.***

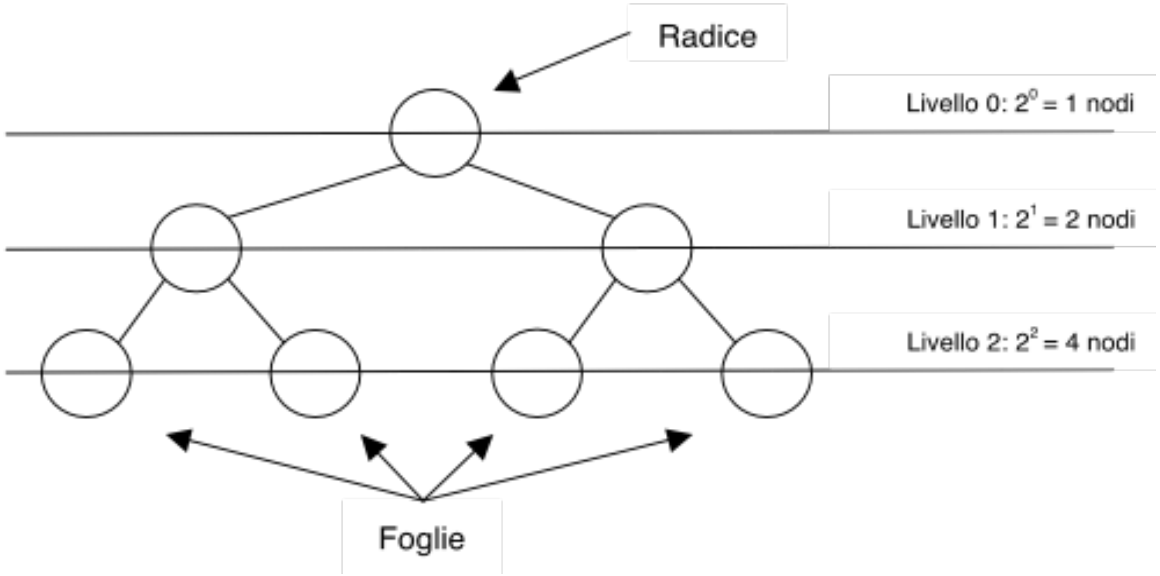
Alberi binari (1)

Un albero binario nel quale tutti i livelli contengono il massimo numero possibile di nodi è chiamato ***albero binario completo***.

Se invece tutti i livelli tranne l'ultimo contengono il massimo numero possibile di nodi mentre l'ultimo livello è riempito completamente da sinistra verso destra solo fino ad un certo punto, l'albero è chiamato ***albero binario quasi completo***.

Alberi binari (2)

In un albero binario completo di altezza h:



- il numero delle foglie è 2^h
- il numero dei nodi interni è $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = \frac{2^h - 1}{2 - 1} = 2^h - 1$
- il numero totale dei nodi è $2^h + 2^h - 1 = 2^{h+1} - 1$.

Alberi binari (3)

Di conseguenza, l'altezza h di un albero binario completo è calcolabile come segue:

- Il numero dei nodi è: $n = 2^{h+1} - 1$
- da cui segue che: $\log(n+1) = h + 1$
- e quindi: $h = \log(n+1) - 1 = \log\frac{n+1}{2}$

In sostanza per un albero binario **completo** si ha $h = \Theta(\log n)$

In generale, per un albero binario si ha $\Omega(\log n) = h \leq n - 1$

Rappresentazione di albero binario in memoria.
Descriveremo tre diverse rappresentazioni:

- **Memorizzazione tramite record e puntatori**
- **Rappresentazione posizionale**
- **rappresentazione tramite vettore dei padri**