Corso di laurea in Informatica
Introduzione agli Algoritmi
Didattica blended

Il problema della ricerca

Angelo Monti

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

Nell'informatica esistono alcuni problemi particolarmente rilevanti, poiché essi:

- si incontrano in una grande varietà di situazioni reali;
- appaiono come sottoproblemi da risolvere nell'ambito di problemi più complessi.
- Uno di questi problemi è la ricerca di un elemento in un insieme di dati (ad es. numeri, cognomi, ecc.).
- Definiamo più formalmente tale problema descrivendone l'input e l'output:

INPUT: una lista di n numeri ed un valore v.
OUTPUT: un indice i tale che $lista[i] = v$ oppure un particolare valore $None$ se il valore v non è presente nella lista.

La ricerca sequenziale

Un primo semplice algoritmo è basato su questa idea:

- ispezioniamo uno alla volta gli elementi del vettore;
- confrontiamo ciascun elemento con v;
- se troviamo v restituiamo **il suo indice**, terminando l'algoritmo;
- se v non è contenuto nel vettore, alla fine della scansione restituiamo **None**.

La ricerca sequenziale

```
def ricercaSeq(A,v):
    n=len(A)
    for i in range(n):
        if A[i]==v:
            return i
    return None
```

$\Theta(1)$

itera $k \leq n$ **volte**

$\Theta(1)$

$\Theta(1)$

$\Theta(1)$

$$T(n) = \Theta(1) + [\Theta(1) + k \cdot \Theta(1)]$$
$$= \Theta(k)$$
$$= O(n)$$

Questo algoritmo ha un costo di:

- $\Theta(n)$ nel caso peggiore (quando, v non è presente nella lista)
- $\Theta(1)$ nel caso migliore (quando v occorre per primo nella lista)

Non abbiamo trovato una stima del costo che sia valida per tutti i casi.

In queste situazioni diremo che il costo dell'algoritmo (in generale, non nel caso peggiore) è un *O(n)*, per evidenziare il fatto che *ci sono input in cui questo valore viene raggiunto, ma ci sono anche input in cui il costo è minore*.

Nei casi, come questo, in cui non sia possibile determinare un valore stretto per il costo computazionale, ed in cui il caso migliore e quello peggiore si discostano, è naturale domandarsi quale sia il costo computazionale dell'algoritmo **nel caso medio**.

Facciamo l'ipotesi che gli elementi del vettore A siano distinti e che v possa apparire con uguale probabilità in qualunque posizione, ossia che:

$$P(\textbf{ v si trova in i-esima posizione}) = \frac{1}{n}$$

Allora il numero medio di iterazioni del ciclo è dato da:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Un'ipotesi alternativa è la seguente: supponiamo che tutte le possibili $n!$ permutazioni della sequenza di n numeri siano **equiprobabili**.

Di queste, ve ne saranno un certo numero nelle quali v appare in **prima** posizione, un certo numero nelle quali v appare in **seconda** posizione, ecc.

Il numero medio di iterazioni del ciclo sarà di conseguenza:

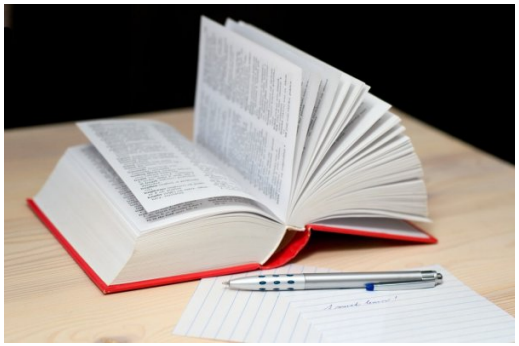
$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{\text{numero di permutazioni in cui v è in posizione i}}{\text{numero totale di permutazioni}}$$

Ora, il numero di permutazioni nelle quali v appare nella *i*-esima posizione è uguale al numero delle permutazioni di $n-1$ elementi, cioè $(n-1)!$ dato che fissiamo solo la posizione di uno degli *n* elementi.

$$\text{numero medio di iterazioni} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$$

Partendo da due diverse ipotesi di equiprobabilità abbiamo ottenuto lo stesso risultato: il costo computazionale nel caso medio è $\Theta(n)$

Ma nella vita di tutti i giorni non ricerchiamo così ....



Ricerca Binaria

E' possibile progettare un algoritmo molto più efficiente nel caso in cui la sequenza degli elementi sia ordinata (come sono, ad esempio, i cognomi degli abbonati nell'elenco telefonico).

Come cerchiamo un nome nell'elenco telefonico? Iniziamo sempre e comunque dalla prima lettera dell'alfabeto? Ovviamente no… andiamo direttamente a una pagina dove pensiamo di trovare cognomi che iniziano con la lettera giusta.

Se siamo precisi troviamo il nome nella pagina, altrimenti ci spostiamo in avanti o indietro (di un congruo numero di pagine) a seconda che la lettera del cognome che cerchiamo venga prima o, rispettivamente, dopo quelle delle iniziali dei cognomi contenuti nella pagina.

RICERCA BINARIA

Un algoritmo che sfrutta questa idea è la ***ricerca binaria***.

Si ispeziona **l'elemento centrale** della sequenza:
- se esso è uguale al valore cercato ci si ferma;
- se il valore cercato è più piccolo si prosegue **nella sola metà inferiore** della sequenza, altrimenti **nella sola metà superiore**.

Una prima considerazione: ad ogni iterazione **si dimezza il numero degli elementi su cui proseguire l'indagine**.

- dopo i iterazioni il numero di elementi su cui ricercare sarà $\frac{n}{2^i}$
- alla peggio ci si ferma quando per i si ha $\frac{n}{2^i} = 1$
- vale a dire $2^i = n \implies i = \log n$
- il numero di iterazioni è dominato da $\log n$

ad ogni iterazione **si dimezza il numero degli elementi su cui proseguire l'indagine**.

Questo ci permette di comprendere dove stia la grande efficienza della ricerca binaria: il numero di iterazioni cresce come $\log n$.

Il che significa, ad esempio, che per trovare (o sapere che non c'è) un elemento in una sequenza ordinata di un **miliardo di valori** bastano circa **30 iterazioni**!

La ricerca binaria

```
def RB(A,v):
    a,b=0,len(A)-1
    while a<=b:
        m=(a+b)//2
        if A[m]==v:
            return m
        elif A[m]>v:
            b=m-1
        else:
            a=m+1
    return None
```

Ricerca binaria

Per quanto sopra detto, abbiamo che il ciclo **while** viene eseguito al più $\Theta(\log n)$ volte; pertanto il costo computazionale è:

- $\Theta(\log n)$ nel caso peggiore (l'elemento non c'è);
- $\Theta(1)$ nel caso migliore (l'elemento si trova al primo colpo).

Poiché caso migliore e caso peggiore non hanno lo stesso costo, valutiamo il costo computazionale del **caso medio**, facendo le seguenti assunzioni:

- il numero di elementi è una **potenza di 2** (per semplicità dei calcoli, ma è facile vedere che questa assunzione non modifica in alcun modo il risultato finale);
- v **è presente** nella sequenza (altrimenti si ricade nel caso peggiore);
- **tutte le posizioni di** v **fra** 1 **e** n **sono equiprobabili**.

Ricerca binaria

Domandiamoci ora quante siano le posizioni $n(i)$ raggiungibili alla $i-$**esima iterazione**:

- con una iterazione si raggiunge la sola posizione $\frac{n}{2}$, cioè $n(1) = 2^0 = 1$;
- con due iterazioni si raggiungono le due posizioni $\frac{n}{4}$ e $3\frac{n}{4}$, cioè $n(2) = 2^1 = 2$;
- con tre iterazioni si raggiungono le quattro posizioni $\frac{n}{8}, 3\frac{n}{8}, 5\frac{n}{8}, 7\frac{n}{8}$, cioè $n(3) = 2^2 = 4$;

e così via.

In generale quindi, l'algoritmo di ricerca binaria **esegue** i **iterazioni** se e solo se v si trova in una delle $n(i) = 2^{i-1}$ posizioni raggiungibili con tale numero di iterazioni.

Ricerca binaria

Ricordando che la probabilità che l'elemento da trovare si trovi su una delle $n(i)$ posizioni toccate dalla i-esima iterazione è $\frac{n(i)}{n}$ (ossia $\frac{2^{i-1}}{n}$), il numero medio di iterazioni è:

$$\text{numero medio di iterazioni} = \sum_{i=1}^{\log n} i \cdot \frac{n(i)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\log n} i \cdot 2^{i-1}$$

e sapendo che: $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1} = (k-1)2^k + 1$

otteniamo: $$\frac{1}{n}\left((\log n - 1) \cdot 2^{\log n} + 1\right) = \log n - 1 + \frac{1}{n}$$

Ossia, il numero medio di iterazioni si discosta **per meno di un confronto** dal numero massimo di iterazioni!

Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi
Lezioni blended

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

ESERCIZIO 1

(dal compito d'esame del 18/2/2021)
Sia dato un vettore A di interi e due valori a e b con $a \leq b$, il problema è quello di sapere quanti elementi di A sono compresi nell'intervallo chiuso $[a, b]$.

•Si progetti un algoritmo per risolvere tale problema su qualsiasi vettore A

•Si progetti un algoritmo più efficiente del precedente assumendo che A sia già ordinato e che contenga solo valori distinti.

Per ciascun algoritmo si descriva a parole l'idea, si scriva lo pseudocodice e si analizzi il tempo di esecuzione asintotica.

ESERCIZIO 2

Sia dato un vettore A di interi ordinato ed un valore a.
Il problema è quello di sapere quante occorrenze di a sono presenti in A (ovviamente la risposta sarà un intero tra 0 e la cardinalità del vettore).

• Si progetti un algoritmo per risolvere tale problema in tempo $\Theta(\log n)$.

Per l' algoritmo si descriva a parole l'idea, e poi si scriva lo pseudocodice.