Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi

Somme e asintotica

ANGELO MONTI

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Metodi per determinare l'asintotica di una somma

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- **Metodo della forma chiusa**
- **Metodo dei limiti asintotici delle somme**
- **Metodo dell'integrale**

Metodo della forma chiusa

Questo metodo richiede di trovare una *forma chiusa* per la somma, cioè una formula esplicita che descriva la somma in funzione di n. Una volta che abbiamo questa formula, possiamo applicare il *limite del rapporto* per determinare l'ordine di crescita asintotico.

Difficoltà: Trovare la forma chiusa per una somma non sempre è facile e non è detto che esista sempre.

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
S(n) & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n & & \\
S(n) & = & n & + & n-1 & + & \dots & + & 2 & + & 1 & & \\
\hline
2 \cdot S(n) & = & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1 & = & (n+1)n
\end{array}
$$

da questo deduciamo che $S(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$.

da questo deduciamo che $S(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$.

Metodo dei limiti asintotici delle somme

Questo metodo consiste nel limitare superiormente e inferiormente i termini della somma e, successivamente, nel confrontare i risultati per concludere l'asintotica.

Consideriamo la somma $S(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$

1. $\sum_{i=1}^{n} i \leq \sum_{i=1}^{n} n = n^2 = O(n^2)$
2. $\sum_{i=1}^{n} i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right) \geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \Omega(n^2)$

Da 1) e 2) deduciamo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2)$

Metodo dell'integrale

Questo metodo è particolarmente utile quando non è nota una forma chiusa per la somma. In questo caso, possiamo approssimare la somma usando un integrale. Questo approccio è basato sull'idea che la somma di una funzione su un intervallo discreto può essere approssimata dall'integrale della stessa funzione su un intervallo continuo.

La somma $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ può essere approssimata dall'integrale della funzione $f(x)$ su un intervallo continuo

- **Caso 1: $f(i)$ monotona crescente**
  Se $f(i)$ è una funzione crescente, ossia $f(i+1) \geq f(i)$ per ogni i, allora:

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx.$$

- **Caso 2: $f(i)$ monotona decrescente**
  Se $f(i)$ è una funzione decrescente, ossia $f(i+1) \leq f(i)$ per ogni i, allora:

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Metodo dell'integrale

Per la funzione crescente $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ abbiamo:

1. $\sum_{i=1}^{n} i \leq n + \int_1^n x\,dx = n + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^n = n + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} = O(n^2)$

2. $\sum_{i=1}^{n} i \geq 1 + \int_1^n x\,dx = 1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^n = 1 + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} = \Omega(n^2)$

Da 1) e 2) ricaviamo $\sum_{i}^{n} i = \Theta(n^2)$

ESERCIZIO:

Consideriamo la **somma di potenze** ovvero: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^c$ con $c > 0$

Metodo dell'integrale:

$$\sum_{i=1}^{n} i^c \approx \int_1^n x^c dx = \left[\frac{x^{c+1}}{c+1} \right]_1^n = \frac{n^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1} = \Theta\left(n^{c+1}\right)$$

ESERCIZIO:

Consideriamo la **somma di potenze** ovvero: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^c$ con $c > 0$

Metodo dei limiti asintotici:

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} i^c \leq \sum_{i=1}^{n} n^c = n^{c+1} = O(n^{c+1})$$

$$
\begin{aligned}
2.\ \sum_{i=1}^{n} i^c &\geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{c+1} \rceil}^{n} i^c \\
&\geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{c+1} \rceil}^{n} \left(\frac{n}{c+1}\right)^c = \frac{n^c}{(c+1)^c}\left(n - \left\lceil \frac{n}{c+1} \right\rceil + 1\right) \\
&\geq \frac{n^c}{(c+1)^c}\left(n - \left(\frac{n}{c+1} + 1\right) + 1\right) \\
&= \frac{n^c}{(c+1)^c}\left(n - \frac{n}{c+1}\right) \\
&= n^{c+1} \cdot \left(\frac{1}{(c+1)^c} - \frac{1}{(c+1)^{c+1}}\right) \\
&= \Omega(n^{c+1})
\end{aligned}
$$

Da 1) e 2) deduciamo $\sum_{i=1}^{n} i^c = \Theta(n^{c+1})$

ESERCIZIO:

Consideriamo **la somma geometrica di ragione c,** ovvero:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} c^i \text{ con } c \text{ costante positiva}$$

Metodo della forma chiusa:

- **Caso** $c = 1$: $S(n) = n + 1$
- **Caso** $c \neq 1$: $S(n) = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$

Di conseguenza abbiamo:

- **Caso** $c < 1 = S(n) = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} = \frac{1-c^{n+1}}{1-c} \leq \frac{1}{1-c} = \Theta(1)$
- **Caso** $c = 1 = S(n) = n + 1 = \Theta(n)$
- **Caso** $c > 1 = S(n) = \frac{c^{n+1}-1}{c-1} = \Theta(c^n)$

Dimostriamo per induzione che: $S_n = \sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$, **per** $c \neq 1$.

Base dell'induzione:

Per $n=0$, la somma è: $S_0 = \sum_{i=0}^{0} c^i = c^0 = 1$

La formula da dimostrare dà:

$$\frac{c^{0+1}-1}{c-1} = \frac{c^1-1}{c-1} = \frac{c-1}{c-1} = 1.$$

Quindi la base dell'induzione è verificata.

Passo induttivo:

Supponiamo che la formula sia valida per $n-1$, ossia:

$$S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c^i = \frac{c^n-1}{c-1}.$$

Dimostriamo che vale anche per n, usando l'ipotesi induttiva:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} c^i = S_{n-1} + c^n = \frac{c^n-1}{c-1} + c^n = \frac{c^n-1+c^n(c-1)}{c-1} = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$$

Questa è esattamente la formula da dimostrare per n, quindi il passo induttivo è verificato.

ESERCIZIO:

Consideriamo la somma $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Metodo dell'integrale:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^n = \ln n - 0 = \Theta(\log n)$$

Pertanto $S(n) = \sum_{1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$

ESERCIZIO:

Consideriamo la somma $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$

Metodo dei limiti asintotici:

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n} \log_2 n = n \log_2 n = O(n \log n)$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \log_2 i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \log_2 \frac{n}{2} \geq \left(n - \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\right) \log_2 \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} \cdot \log_2 \frac{n}{2} = \Omega(n \log n)$$

Da 1) e 2) deduciamo $\sum_{i=1}^{n} \log_2 i = \Theta(n \log n)$

Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi
Lezioni blended

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

ESERCIZI:

Dimostrare che:

1. $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i \log_2 i$ appartiene a $\Theta(n^2 \log n)$
2. $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$ appartiene a $\Theta\left(n 2^n\right)$
   utilizzando il fatto che $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{i+1} - 1$
3. $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i}$ appartiene a $\Theta\left(\frac{2^n}{n}\right)$
   provando per induzione che $S(n) \leq 3 \cdot \frac{2^n}{n}$.
4. $S(n) = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\log_2 i}$ appartiene a $\Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$
5. $\sum_{i}^{n} i \log_2^c i$ appartiene a $\Theta(n \log^c n)$