Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi
Lezioni blended

la notazione asintotica

ANGELO MONTI

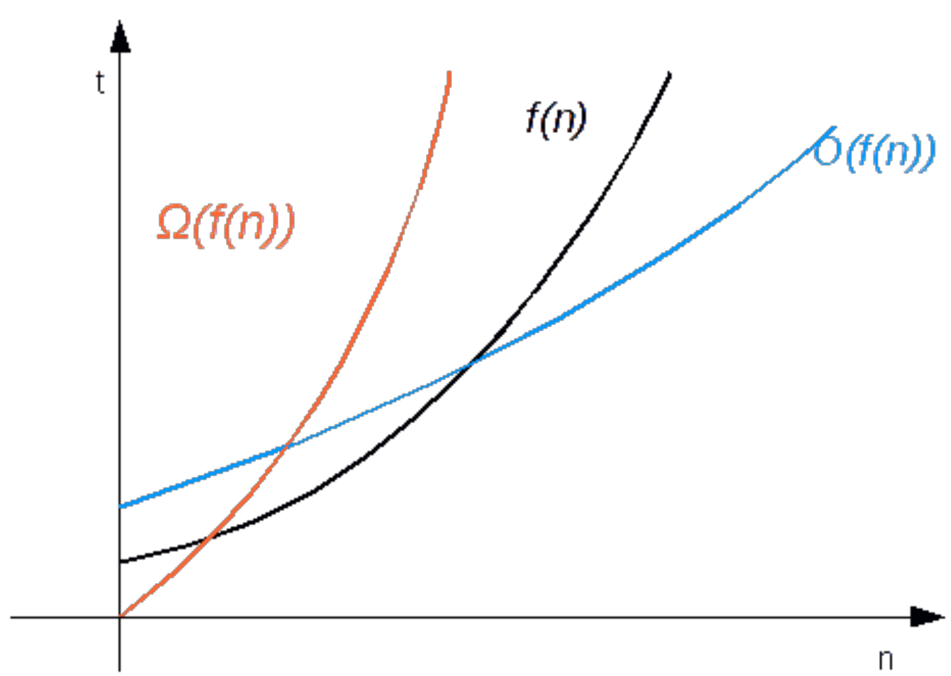
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

In informatica il calcolo asintotico è utilizzato per analizzare la complessità di un algoritmo. In particolar modo, per stimare quanto aumenta il tempo al crescere della dimensione n dell'input.

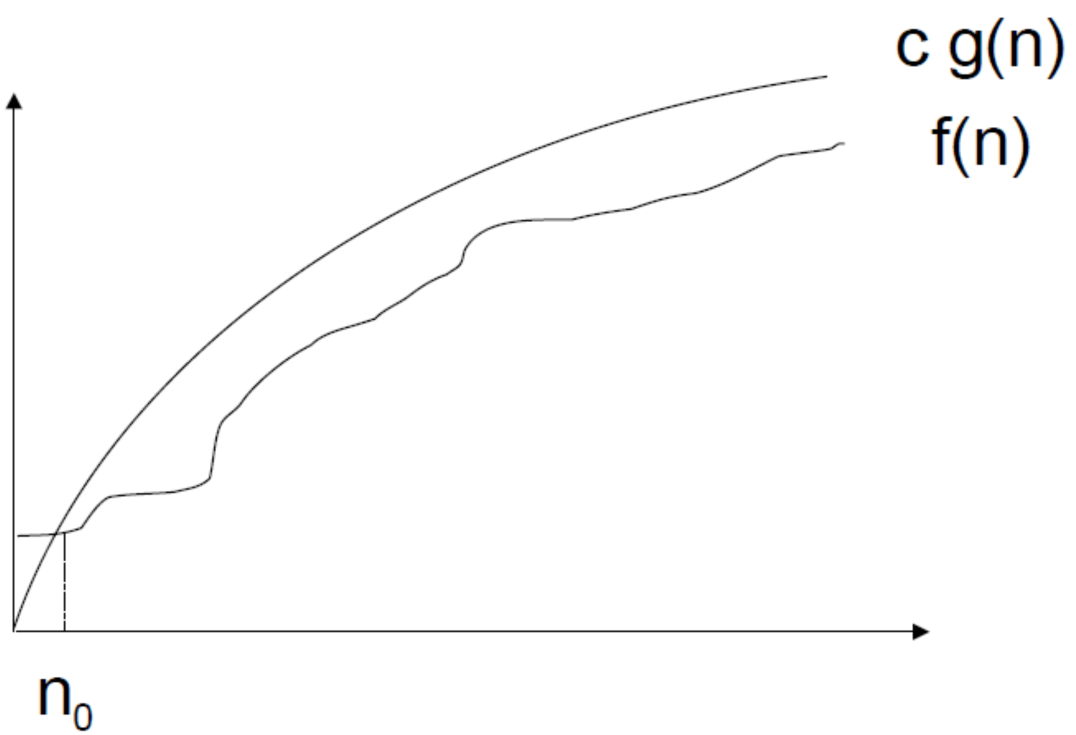
Esistono tre notazioni asintotiche:

Notazione asintotica O. La notazione *O grande* è il limite superiore asintotico
Notazione asintotica Ω. La notazione *Omega* è il limite inferiore asintotico
Notazione asintotica Θ. La notazione *Theta* è il limite asintotico stretto



Il limite superiore asintotico e la notazione *O grande*

$$O(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c. \ f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$



- $O(g(n))$ **è un insieme di funzioni**
    - Con abuso di notazione spesso si scrive $f(n) = O(g(n))$ invece che $f(n) \in O(g(n))$

In $O(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che risultano dominate dalla funzione $g(n)$

Il limite superiore asintotico e la notazione *O grande*

$$O(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \; e \; n_0 \geq 0 \;\; t.c.\; f(n) \leq c \cdot g(n) \; \forall n \geq n_0 \}$$

ESEMPIO 1: $n^2 = O(n^2)$

devo mostrare $n^2 \leq cn^2 \; \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$n^2 \leq n^2$

Basta prendere $c = 1$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $n^2 \leq cn^2 \; \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 2: $5n^2 = O(n^2)$

devo mostrare $n^2 \leq cn^2 \; \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 \leq 5n^2$

Basta prendere $c = 5$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 \leq cn^2 \; \forall n \geq n_0$

Posso astrarre dalle costanti moltiplicative

Il limite superiore asintotico e la notazione *O grande*

$$O(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c.\ f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

Posso astrarre dalle costanti additive:

ESEMPIO 1: $5n^2 - 7 = O(n^2)$

devo mostrare $5n^2 - 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 - 7 \leq 5n^2$

Basta prendere $c = 5$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 - 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 2: $5n^2 + 7 = O(n^2)$

devo mostrare $5n^2 + 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 + 7 \leq 5n^2 + 7n^2 = 12n^2$

Basta prendere $c = 12$ **e** $n_0 = 1$ **e si ha** $5n^2 + 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 3: $n^2 + 10n - 3 = O(n^2)$

devo dimostrare $n^2 + 10n - 3 \leq cn^2 \ \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **e un certo** n_0

$n^2 + 10n - 3 \leq n^2 + 10n \leq n^2 + 10n^2 = 11n^2$

Basta prendere $c = 11$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $n^2 + 10n - 3 \leq cn^2 \ \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO:

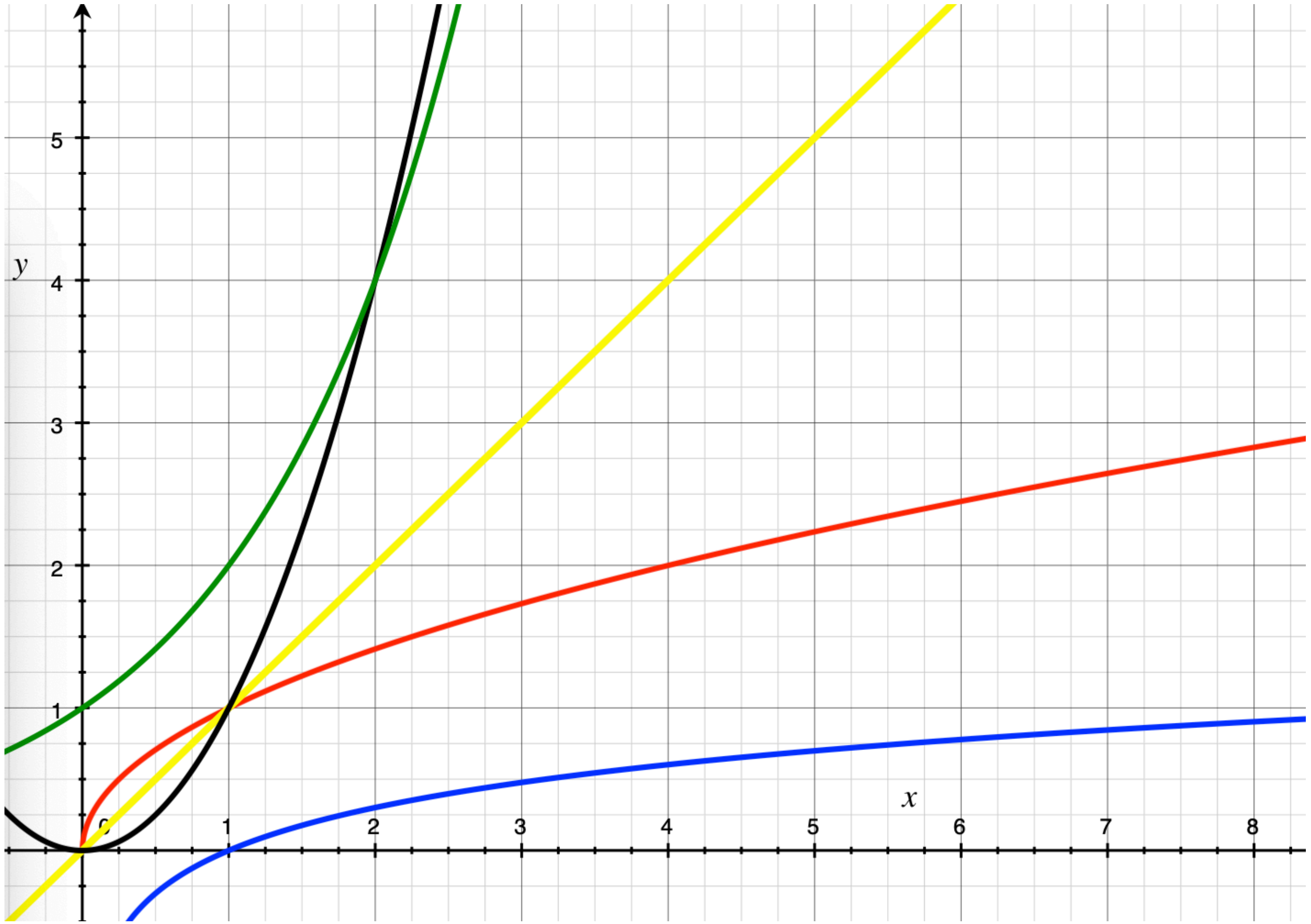
$$f_1(n) = log\, n$$

$$f_2(n) = \sqrt{n}$$

$$f_3(n) = n$$

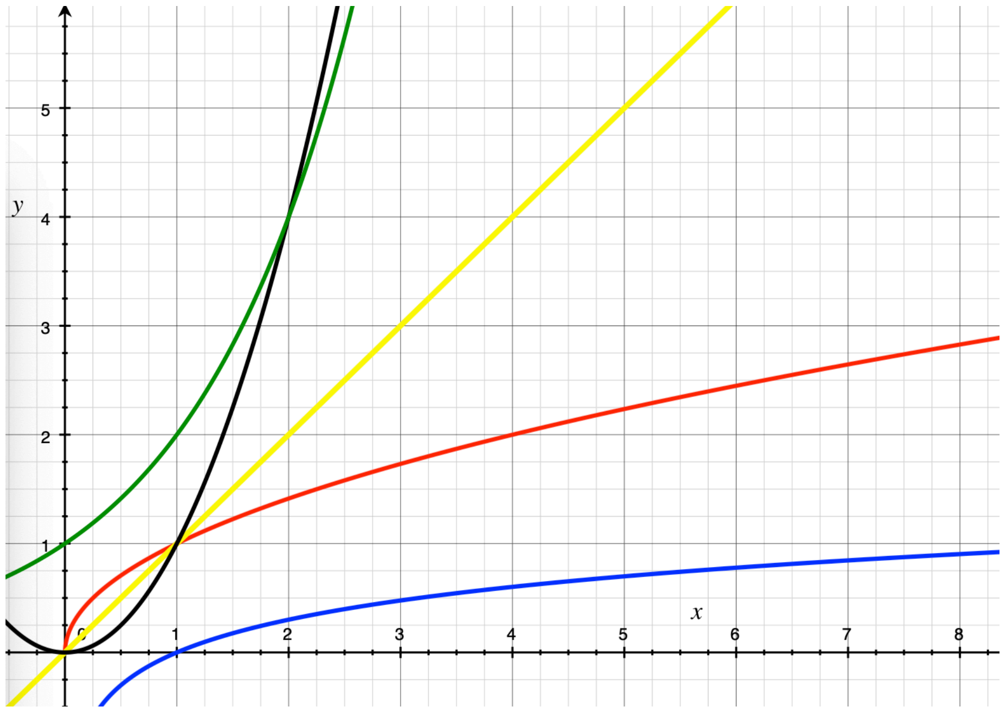
$$f_4(n) = n^2$$

$$f_5(n) = 2^n$$



ESEMPIO:

$$f_1(n) = log\, n$$
$$f_2(n) = \sqrt{n}$$
$$f_3(n) = n$$
$$f_4(n) = n^2$$
$$f_5(n) = 2^n$$



$$log\, n = O\left(\sqrt{n}\right)$$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 0$

$$\sqrt{n} = O(n)$$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$$n = O(n^2)$$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$$n^2 = O\left(2^n\right)$$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 3$

$$\log n = O\left(\sqrt{n}\right)$$

più in generale:

$\log^a n = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ per qualunque $a \geq 1$

ancora più in generale:

$\log^a n = O\left(n^{\frac{1}{b}}\right)$ per qualunque $a, b \geq 1$

un poli-logaritmo è dominato da una qualunque radice

$\sqrt{n} = O(n)$

non è difficile vedere che:

- $n^{\frac{1}{a}} = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ per qualunque intero $a \geq 2$
- $n = O\left(n^{b}\right)$ per qualunque intero $b \geq 1$

pertanto più in generale si ha:

$n^{\frac{1}{a}} = O\left(n^{b}\right)$ per qualunque $a, b \geq 1$

una radice è dominata da un qualunque polinomio

$$n^2 = O\left(2^n\right)$$

più in generale:

$n^a = O\left(2^n\right)$ per qualunque intero $a \geq 1$

non è difficile vedere che $2^n = O(b^n)$ per qualunque intero $b \geq 2$

più in generale quindi :

$n^a = O\left(b^n\right)$ per qualunque intero $a \geq 1$ e intero $b \geq 2$

un polinomio è dominato da un qualunque esponenziale

Esempio. $f(n) = 3n + 3$

- $f(n)$ *è un* $O(n^2)$ *infatti:*

presa la costante $c = 6$ si ha $3n + 3 \leq cn^2$ per ogni $n \geq 1$.

- $f(n)$ *è anche un* $O(n)$ *infatti:*

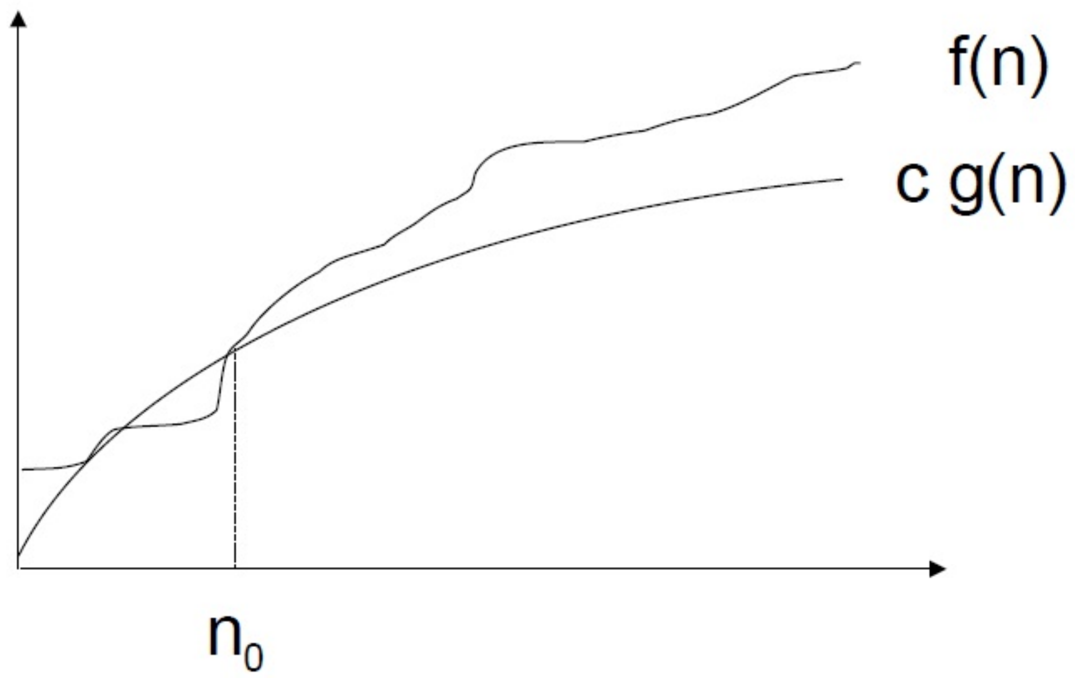
$3n + 3 \leq cn$ per ogni *n* ≥ *1* se *c* ≥ 6, *oppure per ogni n* ≥ *3 se c* ≥ *4.*

In effetti, data una funzione $f(n)$ esistono infinite funzioni *g(n)* per cui $f(n)$ risulta un $O(g(n))$ *(vale a dire funzioni* $g(n)$ *che dominano* $f(n)$*).*

Noi vogliamo determinare la funzione *g(n)* che meglio approssima la funzione $f(n)$ dall'alto o, informalmente, la più piccola funzione *g(n)* tale che $f(n)$ sia $O(g(n))$.

Il limite inferiore asintotico e la notazione *Omega*

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \, e \, n_0 \geq 0 \ \ t.c.\ f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$



- $\Omega(g(n))$ **è un insieme di funzioni**
  - **Con abuso di notazione spesso si scrive** $f(n) = \Omega(g(n))$ **invece che** $f(n) \in \Omega(g(n))$

In $\Omega(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che dominano la funzione $g(n)$

Il limite inferiore asintotico e la notazione *Omega*

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \, e \, n_0 \geq 0 \ \ t.c.\ f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

ESEMPIO 1: $n^2 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$n^2 \geq n^2$

Basta prendere $c = 1$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 2: $5n^2 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 \geq n^2$

Basta prendere $c = 1$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 3: $\frac{n^2}{2} = \Omega(n^2)$

devo mostrare $\frac{n^2}{2} \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$\frac{n^2}{2} \geq \frac{1}{2}n^2$

Basta prendere $c = \frac{1}{2}$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $\frac{n^2}{2} \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

Posso astrarre dalle costanti moltiplicative

Il limite inferiore asintotico e la notazione *Omega*

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \, e \, n_0 \geq 0 \ \ t.c. \, f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

Posso astrarre dalle costanti additive:

ESERCIZIO 1: $5n^2 + 7 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $5n^2 + 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 + 7 \geq 5n^2$

Basta prendere $c = 5$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 + 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESERCIZIO 2: $5n^2 - 7 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $5n^2 - 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 - 7 \geq 4n^2$ **che risulta vero qualora** $n^2 - 7 \geq 0$ **vale a dire** $n \geq \sqrt{7}$

Quindi basta prendere $c = 4$ **e** $n_0 = \sqrt{7}$ **e si ha** $5n^2 - 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO:

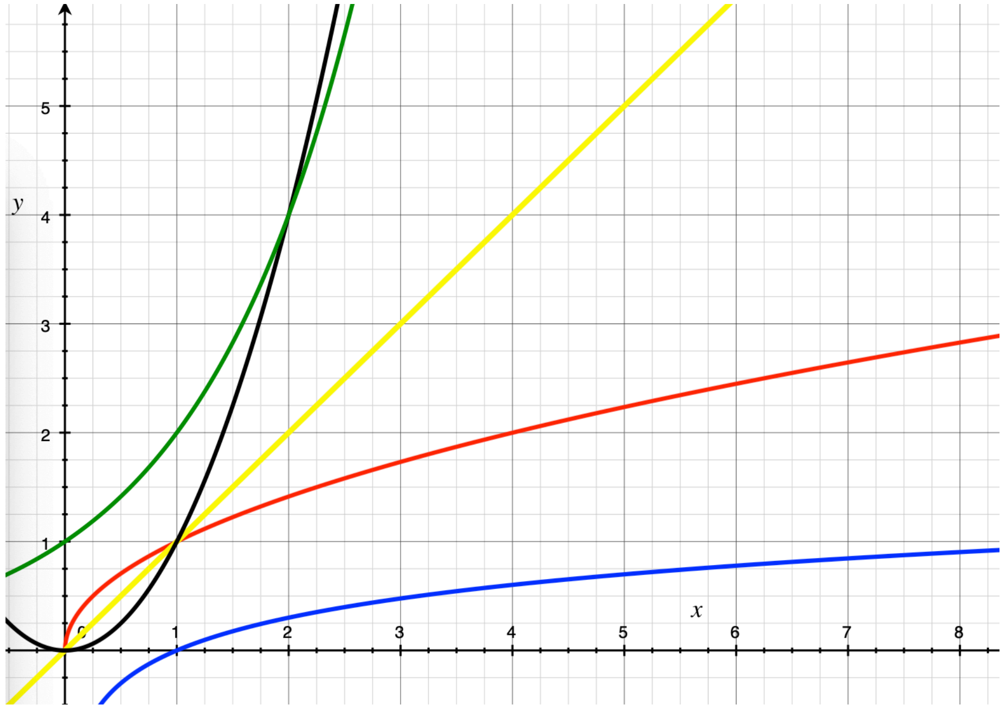
$f_1(n) = log\, n$

$f_2(n) = \sqrt{n}$

$f_3(n) = n$

$f_4(n) = n^2$

$f_5(n) = 2^n$



$\sqrt{n} = \Omega\left(\log\, n\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 0$

$n = \Omega\left(\sqrt{n}\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$n^2 = \Omega(n)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$2^n = \Omega\left(n^2\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 3$

$$\sqrt{n} = \Omega\left(\log n\right)$$

più in generale:

$\sqrt{n} = \Omega\left(\log^a n\right)$ per qualunque $a \geq 1$

ancora più in generale:

$n^{\frac{1}{b}} = \Omega\left(\log^a n\right)$ per qualunque $a, b \geq 1$

una radice domina qualunque poli-logaritmo

$$2^n = \Omega\left(n^2\right)$$

più in generale:

$2^n = \Omega\left(n^a\right)$ per qualunque intero $a \geq 1$

e ancora :

$b^n = \Omega\left(n^a\right)$ per qualunque intero $a \geq 1$ e intero $b \geq 2$

un esponenziale domina qualunque polinomio

Il limite stretto asintotico e la notazione *Theta*

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c_1 > 0, c_2 > 0 \, e \, n_0 \geq 0 \ \ t.c. \ c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

$$1) \ f(n) = O(g(n)) \qquad \Longrightarrow \exists c_1 > 0 \ e \ n_1 \geq 0 \quad t.c. \quad f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \ \forall n \geq n_1$$

$$2) \ f(n) = \Omega(g(n)) \qquad \Longrightarrow \exists c_2 > 0 \ e \ n_2 \geq 0 \quad t.c. \quad f(n) \geq c_2 \cdot g(n) \ \forall n \geq n_2$$

$$1) + 2) \Longrightarrow$$

$$\exists c_1 > 0, c_2 > 0 \, e \, n_0 \geq 0 \quad t.c. \quad c_2 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$$

Ad esempio:

$n^2 = O(n^2)$ **e** $n^2 = \Omega(n^2)$ $\Longrightarrow$ $n^2 = \Theta(n^2)$

$5n^2 - 7 = O(n^2)$ **e** $5n^2 - 7 = \Omega(n^2)$ $\Longrightarrow$ $5n^2 - 7 = \Theta(n^2)$

Per determinare i limiti asintotici di due funzioni $f(n)$ e $g(n)$ possiamo utilizzare il metodo del limite del rapporto $\dfrac{f(n)}{g(n)}$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è zero, allora la funzione $f(n)$ è $O(g(n))$

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) = O(g(n))$$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è ∞, allora la funzione $f(n)$ è $\Omega(g(n))$

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) = \Omega(g(n))$$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è un numero finito k, allora la funzione $f(n)$ è $\Theta(g(n))$

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = k \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n))$$

Polinomi

Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ **dove** $c_d > 0$ **allora** $P_d(n) = O(n^d)$

Prova per per induzione sul grado d del polinomio:

vero per $d = 0$**:** $P_o(n) = c$ e $c = O(1) = O(n^0)$

Assumiamo che $P_{d-1}(n) = O\left(n^{d-1}\right)$

Deduciamo che $P_d(n) = c_n n^d \pm c' n^{d'}$ per $n \geq n_0$ dove $d' \leq d - 1$

- Consideriamo il caso $P_d(n) = c_n n^d + c' n^{d'}$ **:**

$$\begin{aligned} &\leq c_n n^d + c' n^d \\ &= (c_n + c')n^d \\ &= cn^d \text{ con } c = c_n + c' \end{aligned}$$

- Consideriamo il caso $P_d(n) = c_n n^d - c' n^{d'}$ **:**

$P_d(n) = c_n n^d - c' n^{d'} \leq c_n n^d + c' n^{d'} = (c_n + c')n^d = cn^d$ **con** $c = c_n + c'$

Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ **dove** $c_d > 0$ **allora** $P_d(n) = O(n^d)$

Prova alternativa che $P_d(n) = O(n^d)$

$$
\begin{aligned}
P_d(n) &= \sum_{i=0}^{d} c_i n^i \\
&\leq \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\}\, n^i \quad \text{ho eliminato i termini negativi dal polinomio} \\
&\leq \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\}\, n^d \\
&\leq n^d \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\} \\
&\leq cn^d \ \textbf{dove } c = \sum_{i=0}^{d} \max\{0,c_i\} \ \textbf{e } n_0 = 0
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO: prova che $P_5(n) = 3n^5 - 8n^4 + 2n^2 - n + 6 = O(n^5)$

$$P_d(n) = 3n^5 - 8n^4 + 2n^2 - n + 6$$

$$\leq 3n^5 + 2n^2 + 6$$

$$\leq 3n^5 + 2n^5 + 6n^5$$

$$\leq 11n^5$$

quindi:

$P_5(n) \leq cn^5$ **per** $c = 11$ **e** $n_0 = 0$

$log_a n = \Theta(\log_b n)$ **per ogni** a, b

Prova:
Uso la formula per il cambio di base dei logaritmi:

$$log_a n = \frac{1}{\log_b a} log_b n$$
$$= c \log_b n$$

Il cambio di base è dunque asintoticamente irrilevante ed è questa la ragione per cui nella notazione asintotica la base del logaritmo in molti libri non viene esplicitata

$$log_a n = \Theta(log\, n)$$

Algebra della notazione asintotica

Per semplificare il calcolo del costo computazionale asintotico degli algoritmi si possono sfruttare delle semplici regole che dapprima enunciamo, chiarendole con degli esempi, ed in un secondo momento dimostriamo.

Regole sulle costanti moltiplicative

Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geq 0$,

1A: se $f(n)$ è un $O(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $O(g(n))$.

1B: se $f(n)$ è un $\Omega(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $\Omega(g(n))$.

1C: se $f(n)$ è un $\Theta(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $\Theta(g(n))$.

Informalmente: **le costanti moltiplicative si possono ignorare.**

Regole sulla commutatività con la somma

Per ogni *f(n), d(n) > 0*,

2A: se *f(n)* è un $O(g(n))$ e *d(n)* è un $O(h(n))$ allora

f(n)+d(n) è un $O(g(n) + h(n)) = O(\max(g(n), h(n)))$.

2B: se *f(n)* è un $\Omega(g(n))$ e *d(n)* è un $\Omega(h(n))$ allora

f(n)+d(n) è un $\Omega(g(n) + h(n)) = \Omega(max(g(n), h(n)))$.

2C: se *f(n)* è un $\Theta(g(n))$ e *d(n)* è un $\Theta(h(n))$ allora

f(n)+d(n) è un $\Theta(g(n) + h(n)) = (max(g(n), h(n)))$.

Informalmente: **le notazioni asintotiche commutano con l'operazione somma.**

Regole sulla commutatività con il prodotto

Per ogni *f(n)*, *d(n)* > *0*,

2A: se *f(n)* è un $O(g(n))$ e *d(n)* è un $O(h(n))$ allora

$f(n) \cdot d(n)$ è un $O(g(n) \cdot h(n))$.

2B: se *f(n)* è un $\Omega(g(n))$ e *d(n)* è un $\Omega(h(n))$ allora

$f(n) \cdot d(n)$ è un $\Omega(g(n) \cdot h(n))$.

2C: se *f(n)* è un $\Theta(g(n))$ e *d(n)* è un $\Theta(h(n))$ allora

$f(n) \cdot d(n)$ è un $\Theta(g(n) \cdot h(n))$.

Informalmente: **le notazioni asintotiche commutano con l'operazione prodotto.**

Dimostrazione Regola 1A sulle costanti moltiplicative

Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geq 0$,
se $f(n)$ è un $O(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $O(g(n))$.

se $f(n)$ è un $O(g(n))$ allora esistono due costanti c ed n_o tali che

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$

ne segue che $k \cdot f(n) \leq k \cdot cg(n)$ per ogni $n \geq n_0$

Questo prova che, prendendo la costante $c' = k \cdot c$ *come nuova costante* e mantenendo lo stesso n_0, $k \cdot f(n)$ è un $O(g(n))$.

Dimostrazione Regola 2A sulla commutatività della somma.

Per ogni f(n), d(n) > 0,
se f(n) è un $O(g(n))$ e d(n) è un $O(h(n))$ allora
f(n)+d(n) è un $O(g(n)+h(n)) = O(\max(g(n), h(n)))$.

Se f(n) è un $O(g(n))$ e d(n) è un O(h(n)) allora esistono quattro costanti c' e c'', n_0' ed n_0'' tali che:

$$f(n) \leq c' \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0' \quad \text{e} \quad d(n) \leq c'' \cdot h(n) \text{ per ogni } n \geq n_0''$$

Allora:

$$f(n) + d(n) \leq c' \cdot g(n) + c'' \cdot h(n) \leq \max(c', c'') \cdot (g(n) + h(n)) \qquad \text{per ogni } n \geq \max(n_0', n_0'')$$

Segue che $f(n) + d(n)$ è un $O(g(n) + h(n))$ con $c = \max(c', c'')$ e $n_0 = n \geq \max(n_0', n_0'')$

Infine:

$$\max(c', c'')(g(n) + h(n)) \leq 2 \cdot \max(c', c'') \max(g(n), h(n)) .$$

Ne segue che:

$f(n) + d(n)$ è un $O(\max(g(n), h(n)))$.

Dimostrazione Regola 3A sulla commutatività del prodotto.

Per ogni f(n), d(n) > 0,
se *f(n)* è un $O(g(n))$ e *d(n)* è un $O(h(n))$ allora
$$f(n) \cdot d(n) \text{ è un } O(g(n) \cdot h(n)).$$

Se *f(n)* è un *O(g(n))* e *d(n)* è un *O(h(n))* allora esistono quattro costanti c' e c'', n_0' ed n_0'' tali che:

$$f(n) \leq c' \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0' \quad \text{e} \quad d(n) \leq c'' \cdot h(n) \text{ per ogni } n \geq n_0''$$

Allora:
$f(n) \cdot d(n) \leq c' \cdot c'' \cdot g(n) \cdot h(n)$ per ogni $n \geq \max(n_0', n_0'')$

Da ciò segue che $f(n) \cdot d(n)$ è un $O(g(n) \cdot h(n))$.

Esempio. Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 3n2^n + 4n^4$

$$\begin{aligned} 3n2^n + 4n^4 &= \Theta(1) \cdot \Theta(n) \cdot \Theta(2^n) + \Theta(1) \cdot \Theta(n^4) \\ &= \Theta(n \cdot 2^n) + \Theta(n^4) \\ &= \Theta(n \cdot 2^n) \end{aligned}$$

Esempio. Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 2^{n+1}$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &= \Theta(1) \cdot \Theta(2^n) \\ &= \Theta(2^n) \end{aligned}$$

Esempio. Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = \log^n n + 2^{n \log n + 3}$

$$\begin{aligned} \log^n n + 2^{n \log n + 3} &= \log^n n + 8 \cdot n^n \\ &= \Theta(\log^n n) + \Theta(1) \cdot \Theta(n^n) \\ &= \Theta\left(n^n\right) \end{aligned}$$

Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi
Lezioni blended

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

- Dimostrare le regole 1B, 2B e 3B che coinvolgono la notazione Ω.
- Dimostrare le regole 1C, 2C e 3C che coinvolgono la notazione Θ.

  - Calcolare l'andamento asintotico delle seguenti funzioni:

  - $f(n) = n^2 \log n$
  - $f(n) = 3n \log n + 2n^2$
  - $f(n) = 2^{\frac{\log n}{2}} + 5n$
  - $f(n) = 4^{\log n}$
  - $f(n) = \left(\sqrt{2}\right)^{\log n}$

- Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ dove $c_d > 0$ dimostrare che $P_d(n) = \Theta(n^d)$