Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi
Lezioni blended

la notazione asintotica

ANGELO MONTI

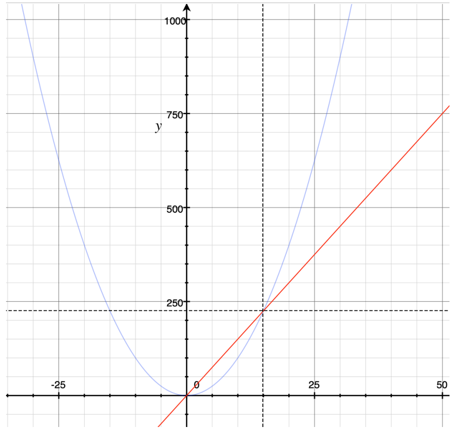
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Sulla base delle slides a cura di T. Calamoneri e G. Bongiovanni per il corso di informatica generale AA 2019/2020

In matematica la notazione asintotica permette di confrontare il tasso di crescita (comportamento asintotico) di una funzione nei confronti di un'altra.

$g(n) = n^2$

$f(n) = 15n$



ESEMPIO:

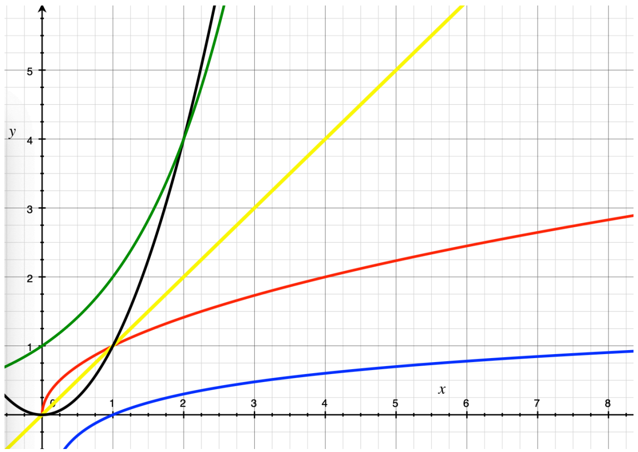
$f_1(n) = log\, n$

$f_2(n) = \sqrt{n}$

$f_3(n) = n$

$f_4(n) = n^2$

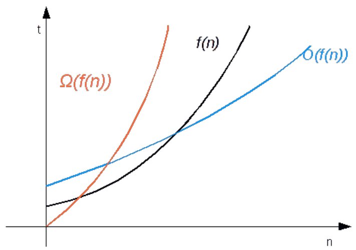
$f_5(n) = 2^n$



In informatica il calcolo asintotico è utilizzato per analizzare la complessità di un algoritmo. In particolar modo, per stimare quanto aumenta il tempo al crescere della dimensione n dell'input.

Esistono tre notazioni asintotiche:

Notazione asintotica O. La notazione *O grande* è il limite superiore asintotico
Notazione asintotica Ω. La notazione *Omega* è il limite inferiore asintotico
Notazione asintotica Θ. La notazione *Theta* è il limite asintotico stretto



Il limite superiore asintotico e la notazione *O grande*

$$O(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c.\ f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

- $O(g(n))$ **è un insieme di funzioni**
  - Con abuso di notazione spesso si scrive $f(n) = O(g(n))$ invece che $f(n) \in O(g(n))$

In $O(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che risultano dominate dalla funzione $g(n)$

Il limite superiore asintotico e la notazione *O grande*

$$O(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c.\ f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

ESEMPIO 1: $n^2 = O(n^2)$
devo mostrare $n^2 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0
$n^2 \leq n^2$
Basta prendere $c = 1$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $n^2 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 2: $5n^2 = O(n^2)$
devo mostrare $n^2 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0
$5n^2 \leq 5n^2$
Basta prendere $c = 5$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

Posso astrarre dalle costanti moltiplicative

Il limite superiore asintotico e la notazione *O grande*

$$O(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c.\ f(n) \leq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

Posso astrarre dalle costanti additive:

ESEMPIO 1: $5n^2 - 7 = O(n^2)$
devo mostrare $5n^2 - 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0
$5n^2 - 7 \leq 5n^2$
Basta prendere $c = 5$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 - 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 2: $5n^2 + 7 = O(n^2)$
devo mostrare $5n^2 + 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0
$5n^2 + 7 \leq 5n^2 + 7n^2 = 12n^2$
Basta prendere $c = 12$ **e** $n_0 = 1$ **e si ha** $5n^2 + 7 \leq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 3: $n^2 + 10n - 3 = O(n^2)$
devo dimostrare $n^2 + 10n - 3 \leq cn^2 \ \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **e un certo** n_0
$n^2 + 10n - 3 \leq n^2 + 10n \leq n^2 + 10n^2 = 11n^2$
Basta prendere $c = 11$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $n^2 + 10n - 3 \leq cn^2 \ \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO:

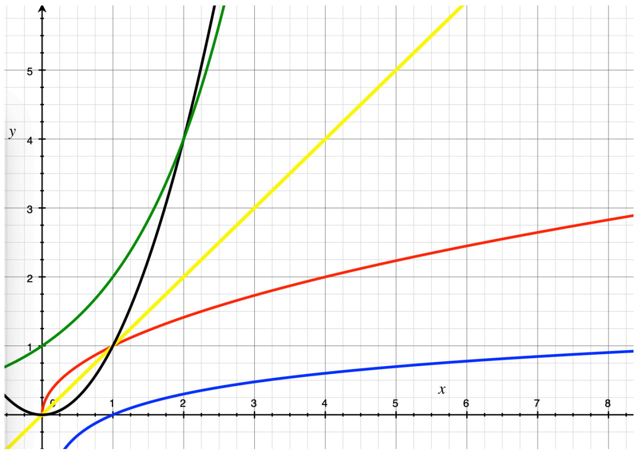
$f_1(n) = log\, n$

$f_2(n) = \sqrt{n}$

$f_3(n) = n$

$f_4(n) = n^2$

$f_5(n) = 2^n$



ESEMPIO:

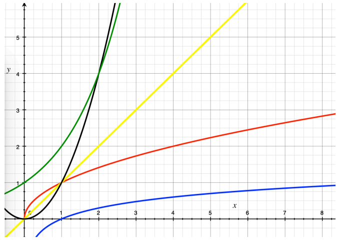
$f_1(n) = log\, n$

$f_2(n) = \sqrt{n}$

$f_3(n) = n$

$f_4(n) = n^2$

$f_5(n) = 2^n$



$log\, n = O\left(\sqrt{n}\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 0$

$\sqrt{n} = O(n)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$n = O(n^2)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$n^2 = O\left(2^n\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 4$

$$log\, n = O\left(\sqrt{n}\right)$$

più in generale:

$\log^a n = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ per qualunque $a \geq 1$

ancora più in generale:

$\log^a n = O\left(n^{\frac{1}{b}}\right)$ per qualunque $a, b \geq 1$

un poli-logaritmo è dominato da una qualunque radice

$$\sqrt{n} = O(n)$$

non è difficile vedere che:

- $n^{\frac{1}{a}} = O\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ per qualunque intero $a \geq 2$
- $n = O\left(n^b\right)$ per qualunque intero $b \geq 1$

pertanto più in generale si ha:

$n^{\frac{1}{a}} = O\left(n^b\right)$ per qualunque $a, b \geq 1$

una radice è dominata da un qualunque polinomio

$$n^2 = O\left(2^n\right)$$

più in generale:

$n^a = O\left(2^n\right)$ per qualunque intero $a \geq 1$

non è difficile vedere che $2^n = O(b^n)$ per qualunque intero $b \geq 2$

più in generale quindi :

$n^a = O\left(b^n\right)$ per qualunque intero $a \geq 1$ e intero $b \geq 2$

un polinomio è dominato da un qualunque esponenziale

Esempio. $f(n) = 3n + 3$

- *$f(n)$ è un $O(n^2)$ infatti:*

presa la costante $c = 6$ si ha $3n + 3 \leq cn^2$ per ogni $n \geq 1$.

- *$f(n)$ è anche un $O(n)$ infatti:*

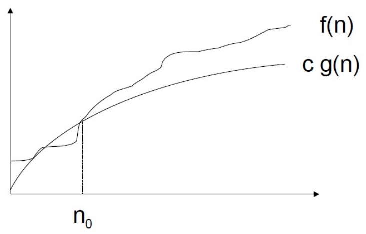
$3n + 3 \leq cn$ per ogni *n ≥ 1* se *c ≥ 6, oppure per ogni n ≥ 3 se c ≥ 4.*

In effetti, data una funzione $f(n)$ esistono infinite funzioni *g(n)* per cui $f(n)$ risulta un $O(g(n))$ *(vale a dire funzioni $g(n)$ che dominano $f(n)$).*

Noi vogliamo determinare la funzione *g(n)* che meglio approssima la funzione $f(n)$ dall'alto o, informalmente, la più piccola funzione *g(n)* tale che $f(n)$ sia $O(g(n))$.

Il limite inferiore asintotico e la notazione *Omega*

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c. \ f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$



- **$\Omega(g(n))$ è un insieme di funzioni**
  - **Con abuso di notazione spesso si scrive $f(n) = \Omega(g(n))$ invece che $f(n) \in \Omega(g(n))$**

In $\Omega(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che dominano la funzione $g(n)$

Il limite inferiore asintotico e la notazione *Omega*

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c. \ f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

ESEMPIO 1: $n^2 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$n^2 \geq n^2$

Basta prendere $c = 1$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 2: $5n^2 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 \geq n^2$

Basta prendere $c = 1$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO 3: $\frac{n^2}{2} = \Omega(n^2)$

devo mostrare $\frac{n^2}{2} \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$\frac{n^2}{2} \geq \frac{1}{2}n^2$

Basta prendere $c = \frac{1}{2}$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $\frac{n^2}{2} \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

Posso astrarre dalle costanti moltiplicative

Il limite inferiore asintotico e la notazione *Omega*

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \ : \ \exists c > 0 \ e \ n_0 \geq 0 \ \ t.c. \ f(n) \geq c \cdot g(n) \ \forall n \geq n_0 \}$$

Posso astrarre dalle costanti additive:

ESERCIZIO 1: $5n^2 + 7 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $5n^2 + 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 + 7 \geq 5n^2$

Basta prendere $c = 5$ **e** $n_0 = 0$ **e si ha** $5n^2 + 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESERCIZIO 2: $5n^2 - 7 = \Omega(n^2)$

devo mostrare $5n^2 - 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$ **per un certo** c **ed un certo** n_0

$5n^2 - 7 \geq 4n^2$ **che risulta vero qualora** $n^2 - 7 \geq 0$ **vale a dire** $n \geq \sqrt{7}$

Quindi basta prendere $c = 4$ **e** $n_0 = \sqrt{7}$ **e si ha** $5n^2 - 7 \geq cn^2 \ \forall n \geq n_0$

ESEMPIO:

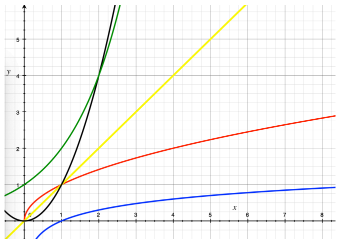
$f_1(n) = log\, n$

$f_2(n) = \sqrt{n}$

$f_3(n) = n$

$f_4(n) = n^2$

$f_5(n) = 2^n$



$\sqrt{n} = \Omega\left(\log\, n\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 0$

$n = \Omega\left(\sqrt{n}\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$n^2 = \Omega(n)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 1$

$2^n = \Omega\left(n^2\right)$ **Basta prendere** $c = 1$ **e** $n_0 = 3$

$\sqrt{n} = \Omega\left(\log\, n\right)$

più in generale:
$\sqrt{n} = \Omega\left(\log^a n\right)$ per qualunque $a \ge 1$

ancora più in generale:
$n^{\frac{1}{b}} = \Omega\left(\log^a n\right)$ per qualunque $a, b \ge 1$

una radice domina qualunque poli-logaritmo

$2^n = \Omega\left(n^2\right)$

più in generale:
$2^n = \Omega\left(n^a\right)$ per qualunque intero $a \ge 1$

e ancora :
$b^n = \Omega\left(n^a\right)$ per qualunque intero $a \ge 1$ e intero $b \ge 2$

un esponenziale domina qualunque polinomio

Il limite stretto asintotico e la notazione *Theta*

$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \; : \; \exists c_1 > 0, c_2 > 0 \; e \; n_0 \ge 0 \;\; t.c. \;\; c_2 \cdot g(n) \le f(n) \le c_1 \cdot g(n) \;\; \forall n \ge n_0 \}$

$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

1) $f(n) = O(g(n)) \quad \Longrightarrow \exists c_1 > 0 \; e \; n_1 \ge 0 \;\; t.c. \;\; f(n) \le c_1 \cdot g(n) \; \forall n \ge n_1$

2) $f(n) = \Omega(g(n)) \quad \Longrightarrow \exists c_2 > 0 \; e \; n_2 \ge 0 \;\; t.c. \;\; f(n) \ge c_2 \cdot g(n) \; \forall n \ge n_2$

1) + 2) $\Longrightarrow$

$\exists c_1 > 0, c_2 > 0 \; e \; n_0 \ge 0 \;\; t.c. \;\; c_2 \cdot g(n) \le f(n) \le c_1 \cdot g(n) \; \forall n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Ad esempio:

$n^2 = O(n^2)$ **e** $n^2 = \Omega(n^2)$ $\Longrightarrow$ $n^2 = \Theta(n^2)$

$5n^2 - 7 = O(n^2)$ **e** $5n^2 - 7 = \Omega(n^2)$ $\Longrightarrow$ $5n^2 - 7 = \Theta(n^2)$

Per determinare i limiti asintotici di due funzioni $f(n)$ e $g(n)$ possiamo utilizzare il metodo del limite del rapporto $\frac{f(n)}{g(n)}$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è zero, allora la funzione $f(n)$ è $O(g(n))$

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0 \iff f(n) = O(g(n))$$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è ∞, allora la funzione $f(n)$ è $\Omega(g(n))$

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \infty \iff f(n) = \Omega(g(n))$$

- Se il limite del rapporto $f(n)/g(n)$ per $n \to \infty$ è un numero finito k, allora la funzione $f(n)$ è $\Theta(g(n))$

$$lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = k \iff f(n) = \Theta(g(n))$$

Polinomi

Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ **dove** $c_d > 0$ **allora** $P_d(n) = O(n^d)$

Prova per per induzione sul grado d del polinomio:

vero per $d = 0$: $P_o(n) = c$ e $c = O(1) = O(n^0)$

Assumiamo che $P_{d'}(n) = O\left(n^{d'}\right)$ dove $d' \leq d - 1$

Deduciamo che $P_d(n) = c_n n^d \pm c' n^{d'}$ per $n \geq n_0$ dove $d' \leq d - 1$

- Consideriamo il caso $P_d(n) = c_n n^d + c' n^{d'}$:

$$\begin{aligned} &\leq c_n n^d + c' n^d \\ &= (c_n + c')n^d \\ &= cn^d \text{ con } c = c_n + c' \end{aligned}$$

- Consideriamo il caso $P_d(n) = c_n n^d - c' n^{d'}$:

$P_d(n) = c_n n^d - c' n^{d'} \leq c_n n^d = cn^d$ **con** $c = c_n$

Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ **dove** $c_d > 0$ **allora** $P_d(n) = O(n^d)$

Prova alternativa che $P_d(n) = O(n^d)$

$$\begin{aligned} P_d(n) &= \sum_{i=0}^{d} c_i n^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\}\, n^i \quad \text{ho eliminato i termini negativi dal polinomio} \\ &\leq \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\}\, n^d \\ &\leq n^d \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\} \\ &\leq cn^d \text{ dove } c = \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\} \text{ e } n_0 = 0 \end{aligned}$$

ESERCIZIO: prova che $P_5(n) = 3n^5 - 8n^4 + 2n^2 - n + 6 = O(n^5)$

$$\begin{aligned} P_d(n) &= 3n^5 - 8n^4 + 2n^2 - n + 6 \\ &\leq 3n^5 + 2n^2 + 6 \\ &\leq 3n^5 + 2n^5 + 6n^5 \\ &\leq 11n^5 \end{aligned}$$

quindi:

$P_5(n) \leq cn^5$ **per** $c = 11$ **e** $n_0 = 0$

$log_a n = \Theta(\log_b n)$ **per ogni** a, b

Prova:
Uso la formula per il cambio di base dei logaritmi:

$$log_a n = \frac{1}{\log_b a} \cdot log_b n$$
$$= c \log_b n$$

Il cambio di base è dunque asintoticamente irrilevante ed è questa la ragione per cui nella notazione asintotica la base del logaritmo in molti libri non viene esplicitata

$$log_a n = \Theta(log\, n)$$

Algebra della notazione asintotica

Per semplificare il calcolo del costo computazionale asintotico degli algoritmi si possono sfruttare delle semplici regole che dapprima enunciamo, ed in un secondo momento dimostriamo e infine ne diamo esempi di applicazione.

Regole sulle costanti moltiplicative

Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geq 0$,

1A: se $f(n)$ è un $O(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $O(g(n))$.

1B: se $f(n)$ è un $\Omega(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $\Omega(g(n))$.

1C: se $f(n)$ è un $\Theta(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $\Theta(g(n))$.

Informalmente: **le costanti moltiplicative si possono ignorare.**

Regole sulla commutatività con la somma

Per ogni *f(n), d(n) > 0,*

2A: se *f(n)* è un $O(g(n))$ e *d(n)* è un $O(h(n))$ allora
f(n)+d(n) è un $O(g(n) + h(n))$ = $O(\max(g(n), h(n)))$.

2B: se *f(n)* è un $\Omega(g(n))$ e *d(n)* è un $\Omega(h(n))$ allora
f(n)+d(n) è un $\Omega(g(n) + h(n))$ = $\Omega(max(g(n), h(n)))$.

2C: se *f(n)* è un $\Theta(g(n))$ e *d(n)* è un $\Theta(h(n))$ allora
f(n)+d(n) è un $\Theta(g(n) + h(n))$ = $(max(g(n), h(n)))$.

Informalmente: **le notazioni asintotiche commutano con l'operazione somma.**

Regole sulla commutatività con il prodotto

Per ogni *f(n), d(n)* > 0,

2A: se *f(n)* è un $O(g(n))$ e *d(n)* è un $O(h(n))$ allora
$f(n) \cdot d(n)$ è un $O(g(n) \cdot h(n))$.

2B: se *f(n)* è un $\Omega(g(n))$ e *d(n)* è un $\Omega(h(n))$ allora
$f(n) \cdot d(n)$ è un $\Omega(g(n) \cdot h(n))$.

2C: se *f(n)* è un $\Theta(g(n))$ e *d(n)* è un $\Theta(h(n))$ allora
$f(n) \cdot d(n)$ è un $\Theta(g(n) \cdot h(n))$.

Informalmente: **le notazioni asintotiche commutano con l'operazione prodotto.**

Dimostrazione Regola 1A sulle costanti moltiplicative

Per ogni $k > 0$ e per ogni $f(n) \geq 0$,
se $f(n)$ è un $O(g(n))$ allora anche $k \cdot f(n)$ è un $O(g(n))$.

se $f(n)$ è un $O(g(n))$ allora esistono due costanti c ed n_o tali che

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$

ne segue che $k \cdot f(n) \leq k \cdot cg(n)$ per ogni $n \geq n_0$

Questo prova che, prendendo la costante $c' = k \cdot c$ *come nuova costante* e mantenendo lo stesso n_0, si ha che

$$k \cdot f(n) \text{ è un } O(g(n)).$$

Dimostrazione Regola 2A sulla commutatività della somma.

Per ogni f(n), d(n) > 0,
se f(n) è un $O(g(n))$ e d(n) è un $O(h(n))$ allora
f(n)+d(n) è un $O(g(n) + h(n)) = O(\max(g(n), h(n)))$.

Se f(n) è un $O(g(n))$ e d(n) è un O(h(n)) allora esistono quattro costanti c' e c'', n_0' ed n_0'' tali che:

$f(n) \leq c' \cdot g(n)$ per ogni $n \geq n_0'$ e $d(n) \leq c'' \cdot h(n)$ per ogni $n \geq n_0''$

Allora:
$f(n) + d(n) \leq c' \cdot g(n) + c'' \cdot h(n) \leq \max(c', c'') \cdot (g(n) + h(n))$ per ogni $n \geq \max(n_0', n_0'')$

Segue che $f(n) + d(n)$ è un $O(g(n) + h(n))$ con $c = \max(c', c'')$ e $n_0 = n \geq \max(n_0', n_0'')$

Infine:
$$\max(c', c'')(g(n) + h(n)) \leq 2 \cdot \max(c', c'') \max(g(n), h(n)) .$$

Ne segue che:
$f(n) + d(n)$ è un $O(\max(g(n), h(n)))$.

Dimostrazione Regola 3A sulla commutatività del prodotto.

Per ogni f(n), d(n) > 0,
se *f(n)* è un $O(g(n))$ e *d(n)* è un $O(h(n))$ allora
$f(n) \cdot d(n)$ è un $O(g(n) \cdot h(n))$.

Se *f(n)* è un *O(g(n))* e *d(n)* è un *O(h(n))* allora esistono quattro costanti c'e c'', n_0' ed n_0'' tali che:

$f(n) \leq c' \cdot g(n)$ per ogni $n \geq n_0'$ e $d(n) \leq c'' \cdot h(n)$ per ogni $n \geq n_0''$

Allora:
$f(n) \cdot d(n) \leq c' \cdot c'' \cdot g(n) \cdot h(n)$ per ogni $n \geq \max(n_0', n_0'')$

Da ciò segue che $f(n) \cdot d(n)$ è un $O(g(n) \cdot h(n))$.

Esempio. Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 3n2^n + 4n^4$

$$\begin{aligned} 3n2^n + 4n^4 &= \Theta(1) \cdot \Theta(n) \cdot \Theta(2^n) + \Theta(1) \cdot \Theta(n^4) \\ &= \Theta(n \cdot 2^n) + \Theta(n^4) \\ &= \Theta(n \cdot 2^n) \end{aligned}$$

Esempio. Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = 2^{n+1}$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &= \Theta(1) \cdot \Theta(2^n) \\ &= \Theta(2^n) \end{aligned}$$

Esempio. Trovare il limite asintotico stretto per $f(n) = \log^n n + 2^{n \log n + 3}$

$$\begin{aligned} \log^n n + 2^{n \log n + 3} &= \log^n n + 8 \cdot n^n \\ &= \Theta(\log^n n) + \Theta(1) \cdot \Theta(n^n) \\ &= \Theta\left(n^n\right) \end{aligned}$$

Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi
Lezioni blended

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

ESERCIZIO:

- Classifica le seguenti funzioni per ordine di crescita, vale a dire trova un ordinamento $g_1, g_2, \dots$ delle funzioni che soddisfi $g_1 = \Omega(g_2),\ g_2 = \Omega(g_3)\ \dots$.

- Partiziona la lista in classi di equivalenza di modo che le funzioni $f(n)$ e $g(n)$ sono nella stessa classe se e solo se $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\left(\sqrt{2}\right)^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$	$\lg n^n$	n^3	$\lg^2 n$
$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{\frac{1}{\lg n}}$	$\lg \lg n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	5
$\lg n$	$2^{\lg n}$	$4^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	$2^{2^{n+1}}$	$(n+1)!$	e^n
$n \cdot lg\, n$	2^n	n	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$		

- Dimostrare le regole 1B, 2B e 3B che coinvolgono la notazione Ω.
- Dimostrare le regole 1C, 2C e 3C che coinvolgono la notazione Θ.

- Calcolare l'andamento asintotico delle seguenti funzioni:
  - $f(n) = n^2 \log n$
  - $f(n) = 3n \log n + 2n^2$
  - $f(n) = 2^{\frac{\log n}{2}} + 5n$
  - $f(n) = 4^{\log n}$
  - $f(n) = \left(\sqrt{2}\right)^{\log n}$

- Sia $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ dove $c_d > 0$ dimostrare che $P_d(n) = \Theta(n^d)$