Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi

la notazione asintotica

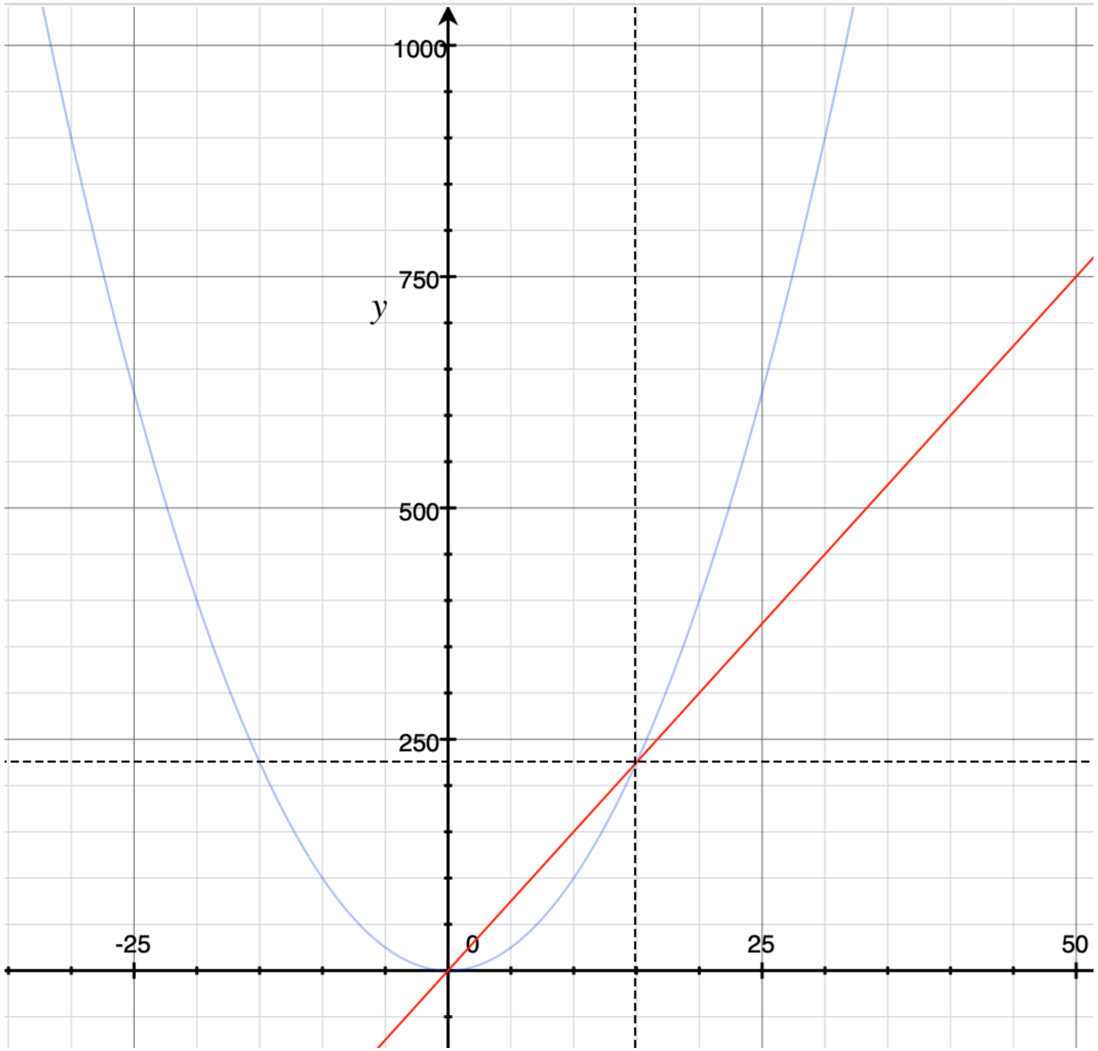
ANGELO MONTI

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

In matematica la notazione asintotica permette di confrontare il tasso di crescita (comportamento asintotico) di una funzione nei confronti di un'altra.

$g(n) = n^2$

$f(n) = 15n$



ESEMPIO:

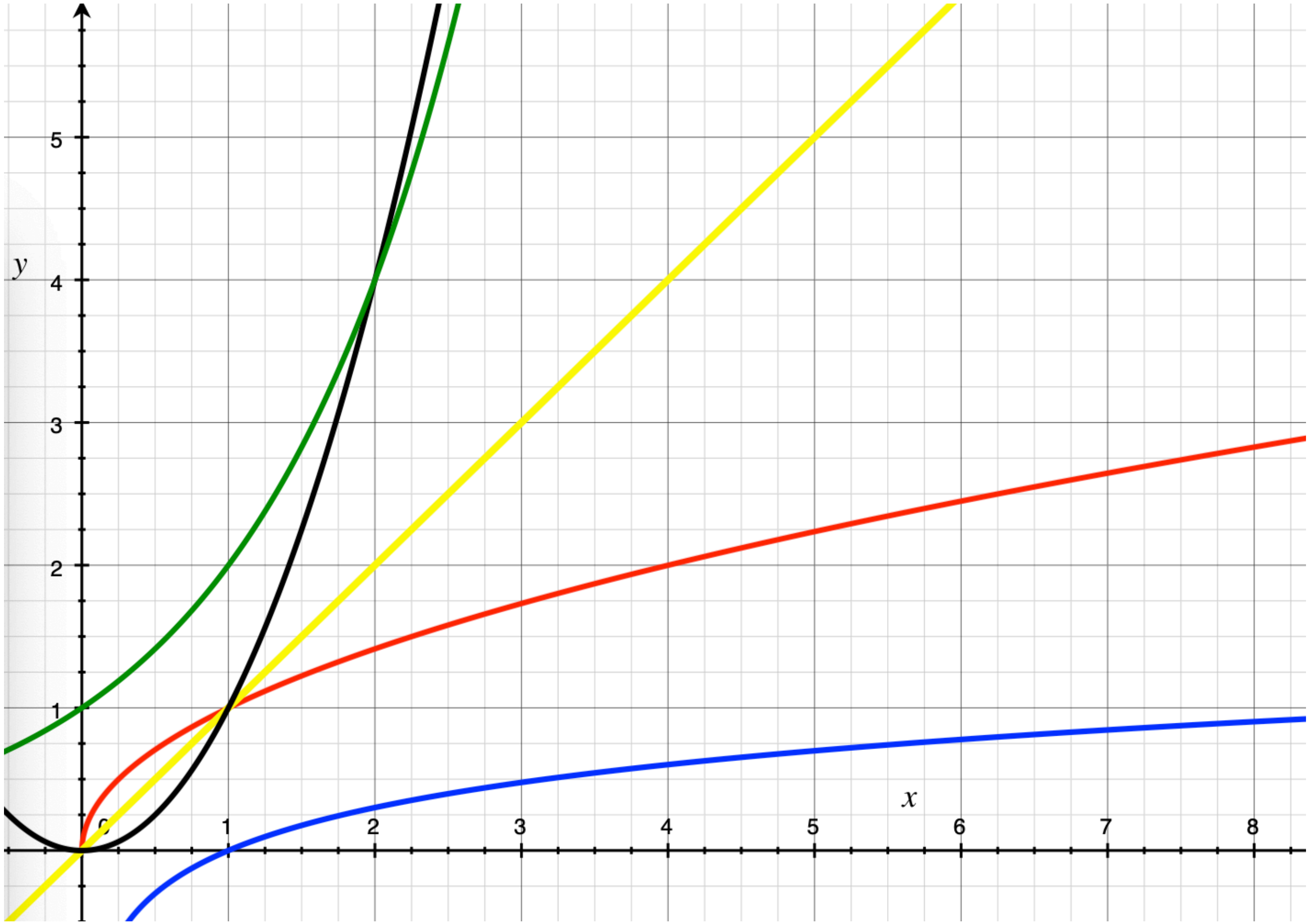
$$f_1(n) = log\, n$$

$$f_2(n) = \sqrt{n}$$

$$f_3(n) = n$$

$$f_4(n) = n^2$$

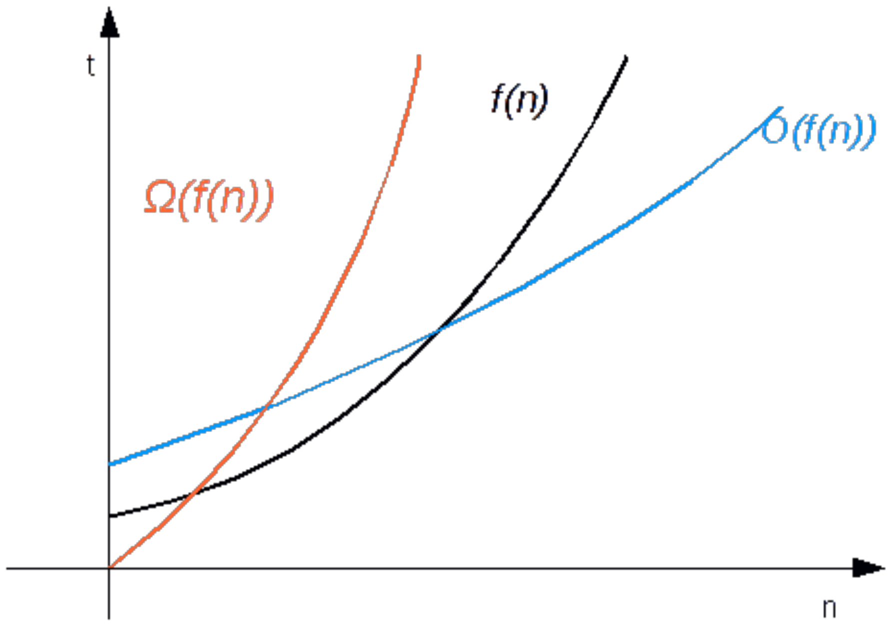
$$f_5(n) = 2^n$$



In informatica il calcolo asintotico è utilizzato per analizzare la complessità di un algoritmo. In particolar modo, per stimare quanto aumenta il tempo di calcolo al crescere della dimensione n dell'input.

Esistono tre notazioni asintotiche:

Notazione asintotica O. La notazione *O grande* è il limite superiore asintotico
Notazione asintotica Ω. La notazione *Omega* è il limite inferiore asintotico
Notazione asintotica Θ. La notazione *Theta* è il limite asintotico stretto



Il limite superiore asintotico e la notazione O

Date due funzioni asintoticamente non negative $f(n)$ e $g(n)$ si dice che

$$f(n) \textbf{ è in } O(g(n))$$

Se esistono due costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che:

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$

In $O(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che risultano dominate dalla funzione $g(n)$

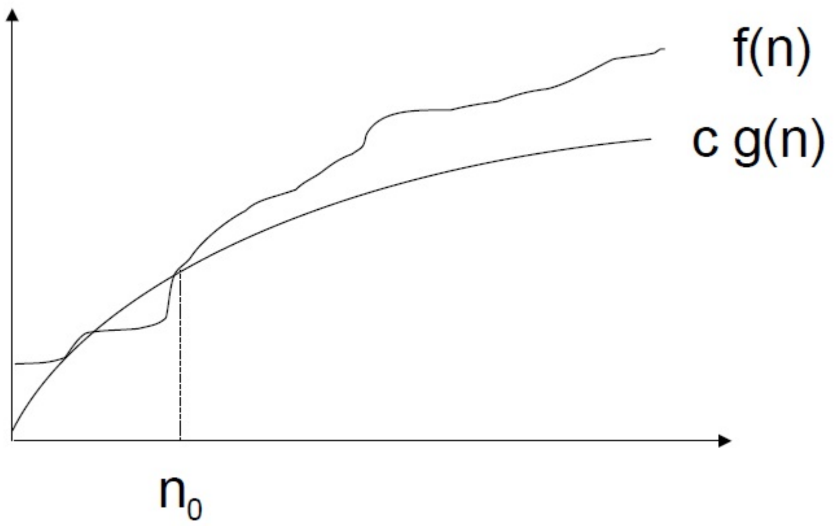
Il limite inferiore asintotico e la notazione Ω

Date due funzioni asintoticamente non negative $f(n)$ e $g(n)$ si dice che

$$f(n) \text{ è in } \Omega(g(n))$$

Se esistono due costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che:

$$f(n) \geq c \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$



In $\Omega(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che dominano la funzione $g(n)$

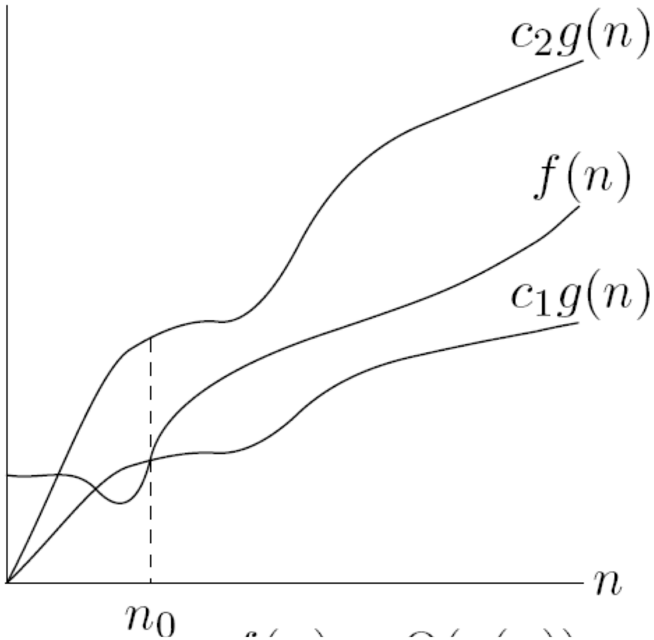
Il limite stretto asintotico e la notazione Θ

Date due funzioni asintoticamente non negative $f(n)$ e $g(n)$ si dice che

$$f(n) \text{ è in } \Theta(g(n))$$

Se esistono tre costanti $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ tali che

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \text{ per ogni } n \geq n_0$$



In $\Theta(g(n))$ troviamo tutte le funzioni che hanno lo stesso ordine asintotico di $g(n)$.

Il metodo del limite dei rapporti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \\ +\infty & \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \\ k, \quad 0 < k < +\infty & \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)) \end{cases}$$

Infatti:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, significa che $f(n)$ cresce più lentamente di $g(n)$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, significa che $f(n)$ cresce più velocemente di $g(n)$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k$ con k valore finito positivo, significa che $f(n)$ e $g(n)$ crescono allo stesso ritmo.

ESEMPIO:

Studia la relazione tra $f(n) = \frac{n}{\log_e n}$ e $g(n) = \sqrt{n}\log_e n$

Possiamo utilizzare il metodo del rapporto dei limiti

Nel nostro caso $lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log^2 n} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Ricordiamo che la radice cresce più velocemente di $\log^2 n$, quindi il numeratore cresce più velocemente rispetto al denominatore.

Di conseguenza il limite tende a $+\infty$

Ne deduciamo: $\frac{n}{\log_e n} \in \Omega\left(\sqrt{n}\log_e n\right)$

Più formalmente:

$$lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log_e^2 n} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

sulla forma indeterminata applico due volte l'Hopital:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{2log_e n}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{4\log_e n} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{4}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{8} = +\infty$$

Ne deduciamo: $\dfrac{n}{\log_e n} \in \Omega\left(\sqrt{n}\log_e n\right)$

ESEMPIO:

Studia la relazione tra $f(n) = \log_a n$ e $g(n) = \log_b n$ dove $a, b > 1$.

Possiamo utilizzare il metodo del rapporto dei limiti

Nel nostro caso $lim_{n \to +\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\log_a n}{\log_b n} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

Basta usare la formula per il cambio di base dei logaritmi:

$$log_a n = \frac{log_b n}{\log_b a} \quad .$$

Otteniamo così

$$lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log_a n}{\log_b a \cdot \log_a n} = lim_{n \to +\infty} \frac{1}{log_b a} = \frac{1}{log_b a}$$

che è una costante maggiore di zero.

Deduciamo dunque $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$

Abbiamo appena dimostrato che:

$$\log_a n \in \Theta(\log_b n)$$

Il cambio di base è dunque asintoticamente irrilevante ed è per questo che nella notazione asintotica la base del logaritmo viene spesso omessa e si scrive ad esempio semplicemente

$$\log_a n \in \Theta(\log n).$$

ESEMPIO:

Studia la relazione tra $f(n) = n^a$ e $g(n) = b^n$ con $a \geq 0$ e $b \geq 2$ costanti.

Per provarlo possiamo utilizzare il metodo del limite dei rapporti

Nel nostro caso $lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^a}{b^n} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Sulla forma indeterminata applico a volte l'Hopital:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a \cdot n^{a-1}}{b^n \cdot \log_e b} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a(a-1) \cdot n^{a-2}}{b^n \cdot \left(\log_e b\right)^2} = \ldots\ldots \lim_{n \to +\infty} \frac{a!}{b^n \cdot \left(\log_e b\right)^a} = 0$$

Deduciamo dunque che $n^a \in O\left(b^n\right)$.

Abbiamo provato che:

$$n^a \in O\left(b^n\right)$$

ovvero che **tutti i polinomi sono dominati dalle funzioni esponenziali crescenti.**

ESEMPIO:

Studiare la relazione tra $f(n) = log_a\, n$ e $g(n) = n^{1/b}$ per ogni $a > 1$ e $b \geq 1$

Possiamo utilizzare il metodo del rapporto dei limiti

Nel nostro caso $lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^{\frac{1}{b}}} = \frac{+\infty}{+\infty}$

sulla forma indeterminata applico Hopital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log_e a}{n}}{\frac{n^{\frac{1}{b}-1}}{b}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b \cdot \log_e a}{n^{\frac{1}{b}}} = 0$$

Ne deduciamo $\log_a n \in O\left(n^{1/b}\right)$ ovvero che **il logaritmo è dominato da qualunque radice.**

Considera il polinomio $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i \cdot n^i$ **dove** $c_d > 0$.

Prova che $P_d(n) = O(n^d)$

$$
\begin{aligned}
P_d(n) &= \sum_{i=0}^{d} c_i \cdot n^i \\
&\leq \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\}\, n^i \qquad \text{abbiamo eliminato i termini negativi dal polinomio} \\
&\leq \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\}\, n^d \\
&\leq n^d \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\} \\
&\leq cn^d \ \textbf{ dove } c = \sum_{i=0}^{d} \max\{0, c_i\} \ \textbf{ e } n_0 = 0
\end{aligned}
$$

Considera il polinomio $P_d(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i n^i$ **dove** $c_d > 0$.

Prova che $P_d(n) = \Omega(n^d)$

$$P_d(n) = c_d \cdot n^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i \cdot n^i$$

$\geq c_d \cdot n^d - \sum_{i=0}^{d-1} |c_i| n^i$ abbiamo reso negativi i termini positivi del polinomio

$$\geq c_d \cdot n^d - n^{d-1} \sum_{i=0}^{d-1} |c_i|$$

$= \frac{c_d \cdot n^d}{2} + \frac{c_d \cdot n^d}{2} - n^{d-1} \cdot c_s$ dove $c_s = \sum_{i=0}^{d-1} |c_i|$

$$= \frac{c_d \cdot n^d}{2} + n^{d-1}\left(\frac{c_d \cdot n}{2} - c_s\right)$$

$\geq \frac{c_d \cdot n^d}{2}$ diseguaglianza che vale assumendo $n \geq n_0 = \frac{2 \cdot c_s}{c_d}$

$\geq c \cdot n^d$ con $c = c_s/2$

Da $p_d(n) = O(n^d)$ e $p_d(n) = \Omega(n^d)$ ricaviamo $p_d(n) = \Theta(n^d)$.

Allo stesso risultato, ma per via più breve, possiamo giungere utilizzando il limite del rapporto:

Sia $f(n) = \sum_{i=0}^{d} c_i \cdot n^i$ e $g(n) = n^d$ allora:

$$
\begin{aligned}
lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=0}^{d} c_i \cdot n^i}{n^d} \\
&= lim_{n \to +\infty} \frac{c_0}{n^d} + lim_{n \to +\infty} \frac{c_1}{n^{d-1}} + \ldots + lim_{n \to +\infty} \frac{c_{d-1}}{n} + lim_{n \to +\infty} c_d \\
&= 0 + 0 + \ldots + 0 + c_d \\
&= c_d
\end{aligned}
$$

Poiché c_d è una costante maggiore di zero deduciamo $p_d(n) = \Theta(n^d)$.

Corso di laurea in Informatica
Insegnamento di Introduzione agli Algoritmi

Esercizi per casa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

ESERCIZIO:

- Classifica le seguenti funzioni per ordine di crescita, vale a dire trova un ordinamento $g_1, g_2, \ldots$ delle funzioni che soddisfi $g_1 = \Omega(g_2),\; g_2 = \Omega(g_3) \;\; \ldots$.

- Partiziona la lista in classi di equivalenza di modo che le funzioni $f(n)$ e $g(n)$ sono nella stessa classe se e solo se $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\left(\sqrt{2}\right)^{\lg n}$ $\quad n^2 \quad n! \quad (\lg n)! \quad \lg n^n \quad n^3 \quad \lg^2 n$

$\lg(n!) \quad 2^{2^n} \quad n^{\frac{1}{\lg n}} \quad \lg \lg n \quad n \cdot 2^n \quad n^{\lg \lg n} \quad 5$

$\lg n \quad 2^{\lg n} \quad 4^{\lg n} \quad (\lg n)^{\lg n} \quad 2^{2^{n+1}} \quad (n+1)! \quad e^n$

$n \cdot \lg n \quad 2^n \quad n \quad 2^{\sqrt{2 \lg n}} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n$

- Applicando sia le definizioni formali che il metodo del limite del rapporto prova o confuta le seguenti affermazioni asintotico preciso delle seguenti funzioni:

- $f(n) = 3n\log\, n + 2n^2$ *appartiene a* $\Theta(n^2)$
- $f(n) = 8^{\frac{\log_2 n}{2}} + 5n$ *appartiene a* $O(n)$
- $f(n) = 4^{\log_2 n}$ *appartiene a* $\Omega(n^2)$
- $f(n) = \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 n}$ *appartiene a* $\Omega\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$
- *f(n) =* $2^{n\log_2 n}$ *appartiene a* $\Omega(n^3)$
- *f(n)=* $3^{log_2 n}$ *appartiene a* $\Theta\left(n^{\log_2 3}\right)$