

Esercizio 1 (max 10 punti). Siano A e B due array ordinati contenenti rispettivamente n e m valori distinti, con $n < m$: risulta quindi $A[i] < A[i + 1]$ per $1 \leq i < n$ e $B[j] < B[j + 1]$ per $1 \leq j < m$. Un'inversione di A rispetto a B è una coppia di indici i e j tali che $A[i] > B[j]$. Progettare un algoritmo iterativo, il più possibile efficiente, per calcolare il numero delle inversioni di A rispetto a B . Analizzare nel caso peggiore il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto in funzione di n e m .

Esercizio 2 (max 10 punti). Mostrare l'albero di decisione corrispondente al seguente algoritmo di ordinamento nel caso $n = 3$:

```

algoritmo ordinamentoLento (array  $A$ , intero  $n$ )
1.   do
2.      $i \leftarrow 1$ 
3.     while ( $i < n$ ) do
4.       if  $A[i] > A[i + 1]$  then
5.         scambia  $A[i]$  e  $A[i + 1]$ 
6.         break
7.       else  $i \leftarrow i + 1$ 
8.     while ( $i < n$ )

```

Qual è un'istanza di caso peggiore? Partendo da $n = 3$, generalizzare il ragionamento a valori arbitrari di n .

Esercizio 3 (max 9 punti). Considerare il seguente algoritmo:

```

algoritmo elementoComune (array  $A$ , interi  $i_1, f_1, i_2, f_2$ )
1.   if ( $i_1 > f_1$  or  $i_2 > f_2$ ) then return false
2.   if ( $i_1 = f_1$  and  $i_2 = f_2$ ) then
3.     if ( $A[i_1] = A[i_2]$ ) then return true
4.     else return false
5.    $m_1 \leftarrow \frac{i_1 + f_1}{2}$ 
6.    $m_2 \leftarrow \frac{i_2 + f_2}{2}$ 
7.   return elementoComune( $A, i_1, m_1, i_2, m_2$ ) or elementoComune( $A, i_1, m_1, m_2 + 1, f_2$ ) or
   elementoComune( $A, m_1 + 1, f_1, i_2, m_2$ ) or elementoComune( $A, m_1 + 1, f_1, m_2 + 1, f_2$ )

```

L'algoritmo restituisce **true** se e solo se $\{A[i_1], \dots, A[f_1]\} \cap \{A[i_2], \dots, A[f_2]\} \neq \emptyset$.

- Assumendo che la chiamata iniziale sia `elementoComune($A, 1, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, n$)`, con n potenza di 2, calcolare il tempo di esecuzione dell'algoritmo.
- Mostrare l'albero della ricorsione per $n = 8$. Per ciascun nodo dell'albero, indicare quali sono le porzioni dell'array A coinvolte nella corrispondente chiamata ricorsiva.

Esercizio 4 (max 6 punti). Dimostrare che la soluzione della seguente relazione di ricorrenza è in $O(n \log^2 n)$:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 4T(\frac{n}{4}) + n \log n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risolvere la ricorrenza per iterazione, assumendo che n è una potenza di 4.