ESERCITAZIONI DI *INTRODUZIONE AGLI ALGORITMI*
(A.A. 09/10, CANALE E-O)

SOLUZIONI ESERCIZI DI RIEPILOGO (A) (APRILE 2010)

Negli esercizi che seguono siamo interessati a contare o a stimare il numero di volte che viene stampata la stringa "Hello world" in alcuni programmi iterativi. Le domande fondamentali da porsi per analizzare la complessità di un ciclo di iterazioni sono: (1) Quante volte viene eseguito il ciclo? (2) Qual è il contributo di ciascuna iterazione del ciclo?

Esercizio 1

$i = 27$;
while $i \leq n$ **do**
  print "Hello world";
  $i = i \cdot 3$;

Con H indichiamo il numero di volte che viene stampata la stringa "Hello world". Scriviamo una tabella con i valori assunti dalla variabile di ciclo i e, in corrispondenza di ciascuna iterazione, il numero di volte che viene stampata la stringa "Hello world".

$i =$	27	$27 \cdot 3$	$27 \cdot 3^2$	...	$27 \cdot 3^t$
$H =$	1	$+1$	$+1$	...	$+1$

Il numero di stringhe "Hello world" stampate è uguale al numero di volte che viene eseguito il ciclo. Il numero di iterazioni del ciclo è dato dalla condizione di terminazione. La condizione di terminazione è $27 \cdot 3^t > n$. L'ultima iterazione del ciclo viene cioè eseguita quando la variabile di ciclo assume il valore $23 \cdot 3^t = n$, e il numero dei cicli eseguiti è uguale a $t + 1$ (si comincia a contare da 0: il primo ciclo è eseguito per il valore $27 = 27 \cdot 3^0$).

$$27 \cdot 3^t = n \Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^t = n \Leftrightarrow 3^{t+3} = n \Leftrightarrow t + 3 = \log_3(n) \Leftrightarrow t = \log_3(n) - 3$$

Dunque $H = t + 1 = \log_3(n) - 2$.

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it.

Esercizio 2 [1]

```
for i = 1 to n do
    for j = 1 to i do
        for k = 1 to j do
            print "Hello world";
```

Per $i = 1$: $\begin{array}{rc} j = & 1 \\ k = & 1 \\ H = & 1 \end{array}$, Per $i = 2$: $\begin{array}{rcc} j = & 1 & 2 \\ k = & 1 & 1,2 \\ H = & 1 & +2 \end{array}$, Per $i = 3$: $\begin{array}{rccc} j = & 1 & 2 & 3 \\ k = & 1 & 1,2 & 1,2,3 \\ H = & 1 & +2 & +3 \end{array}$

Per $i = n$: $\begin{array}{rcccccc} j = & 1 & 2 & 3 & ... & n \\ k = & 1 & 1,2 & 1,2,3 & ... & 1,2,3,...,n \\ H = & 1 & +2 & +3 & ... & +n \end{array}$

Dunque H è $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$, o, in forma più compatta:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} k = \sum_{k=1}^{1} k + \sum_{k=1}^{2} k + \sum_{k=1}^{3} k + ... + \sum_{k=1}^{n} k.$$

Per stimare H visualizziamolo come segue.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 \\
1 & + & 2 \\
1 & + & 2 & + & 3 \\
 & & & \vdots \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & n/2 \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & n/2 & + & (n/2+1) \\
 & & & \vdots \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & n/2 & + & ... & + & n
\end{array}$$

Per semplicità assumiamo che n sia pari. Osservando le colonne qui sopra notiamo che l'addendo i, per i che va da 1 a $n/2$, appare *almeno* i volte nella somma complessiva. Dunque per ogni tale i, H contiene un addendo $\geq i \cdot i$. Dunque abbiamo - usando la formula per la somma dei quadrati - la seguente disequazione.

$$H \geq \sum_{i=1}^{n/2} i^2 = \frac{n/2(n/2+1)(n+1)}{6} = \Theta(n^3).$$

Alternativamente, basta osservare che il termine mediano $\sum_{i=1}^{n/2} i$ occorre in tutti i termini dall'$n/2$-esimo in poi. Dunque occorre $n/2$ volte. Dunque

$$H \geq n/2 \sum_{i=1}^{n/2} i = n/2 \frac{n/2 \cdot (n/2+1)}{2} = \Theta(n^3).$$

Qui abbiamo usato soltanto la formula per la somma dei primi $n/2$ interi.

[1] N.B. In classe abbiamo visto un esempio con un ciclo esterno in più! L'esercizio assegnato era invece il seguente. La stima inferiore che abbiamo visto in classe si applica già a questo caso.

Esercizio 3

```
while n ≥ 1 do
    j = 0;
    while j ≤ n do
        print "Hello world";
        j = j + 4;
    n = n/4
```

$n =$	n	$n/4$	$n/4^2$	...	$n/4^s$
$j =$	$0, 4, 4 \cdot 2, ..., 4 \cdot t$	$0, 4, 4 \cdot 2, ...$	$0, 4, 4 \cdot 2, ...$	...	$0, 4, 4 \cdot 2, ...$
#cicli $j =$	$n/4 + 1$	$n/4^2 + 1$	$n/4^3 + 1$	...	$n/4^{s+1} + 1$

Per ogni iterazione del ciclo esterno (n), H è uguale al numero di iterazioni del ciclo interno (j).

Il numero dei cicli esterni è $s + 1$, dove s è minimo tale che $n/4^s \leq 1$, i.e., $s = \log_4(n)$. Alla $s + 1$-esima iterazione il valore in entrata al ciclo While esterno è $n/4^{\log_4(n)} = 1$ e il While interno viene eseguito una volta, per $j = 0$ (questo corrisponde a $n/4^{s+1} + 1 = 1$ nella tabella di sopra).

Il totale dei cicli interni (e dunque il valore finale di H) è:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\log_4(n)} (\frac{n}{4^{i+1}} + 1) &= \sum_{i=0}^{\log_4(n)} \left(\frac{n}{4} \left(\frac{1}{4^i} \right) + 1 \right) \\
&= \frac{n}{4} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\log_4(n)} \frac{1}{4^i} \right) + \sum_{i=0}^{\log_4(n)} 1 \\
&= \frac{n}{4} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\log_4(n)} \frac{1}{4^i} \right) + \log_4(n) + 1.
\end{aligned}$$

Per capire la sommatoria qui sopra, in relazione alla tabella di sopra: i varia da 0 a s (dunque abbiamo $s + 1$ addendi), e ogni addendo è dato dal numero di cicli interni per ogni valore assunto da i (ultima riga della tabella di sopra), espresso in funzione di i.

Il primo addendo contiene la progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$. Valutiamola.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\log_4(n)} \left(\frac{1}{4} \right)^i &= \frac{1 - \frac{1}{4^{\log_4(n)+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^{\log_4(n)} \cdot 4} \right) \\
&= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n \cdot 4} \right) \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot n}
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo - sostituendo nell'espressione per H il valore appena calcolato per la progressione geometrica -

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot n} \right) + \log_4(n) + 1 \\
&= \frac{n}{3} - \frac{1}{12} + \log_4(n) + 1 \\
&= \Theta(n).
\end{aligned}
$$

Osservazione (Serie Geometrica)**.** Qui sopra abbiamo usato la formula per la serie geometrica. Se non volete ricordarvi la formula, potete ricavarla facilmente così. La serie geometrica di ragione $x \neq 1$ (questo dovete ricordarvelo!) è la serie

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k.$$

Moltiplichiamola per $(1 - x)$. Otteniamo

$$
\begin{aligned}
(1-x)\sum_{i=0}^{k} x^i &= \sum_{i=0}^{k} x^i - x\sum_{i=0}^{k} x^i \\
&= (x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k) - x(x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k) \\
&= (x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k) - x^1 - x^2 - \cdots - x^k - x^{k+1}) \\
&= x^0 - x^{k+1}
\end{aligned}
$$

Concludendo,

$$(1-x)\sum_{i=0}^{k} x^i = x^0 - x^{k+1} = 1 - x^{k+1} \Rightarrow \sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Se volete un'altra formula per la serie geometrica, moltiplicatela per $(x - 1)$.

Esercizio 4

```
for i = 1 to n do
    for j = 1 to i do
        print "Hello world";
    for k = 5 to 2i do
        print "Hello world";
```

I due cicli for interni (su j e su k) sono *indipendenti* (non annidati). Il valore di H sarà dunque la somma del numero di stringhe "Hello world" stampate nel primo ciclo interno (su j) più il numero di stringhe "Hello world" stampate nel secondo ciclo interno (su k). Denotiamo queste quantità rispettivamente con H_1 e H_2. N.B. Nel secondo ciclo interno non vengono stampate stringhe per $i = 1, 2$.

$i =$	1	2	3	4	5	...	n
$j =$	1	$1 \rightarrow 2$	$1 \rightarrow 3$	$1 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 5$	...	$1 \rightarrow n$
$H_1 =$	1	$+\ 2$	$+\ 3$	$+\ 4$	$+5$	...	$+n$
$k =$	$5 \rightarrow 2$	$5 \rightarrow 4$	$5 \rightarrow 6$	$5 \rightarrow 8$	$5 \rightarrow 10$	...	$5 \rightarrow 2n$
$H_2 =$	0	$+0$	$+2$	$+4$	$+6$	...	$+(2n - 5 + 1)$

Vengono eseguiti n cicli esterni (su i).

$$H_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i = \Theta(n^2).$$

$$H_2 = 0 + 0 + 1 + 3 + 5 + 7.... + 2(n-2) = \sum_{i=1}^{n-2} i = \frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2} = \Theta(n^2).$$

Dunque H è

$$H_1 + H_2 = \Theta(n^2) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2).$$