ESERCITAZIONI DI ***INTRODUZIONE AGLI ALGORITMI***
(A.A. 09/10, CANALE E-O)

SOLUZIONI ESONERO ESERCIZI 2,3, CON DISCUSSIONE DEGLI ERRORI PIÙ COMUNI

Esercizio 2

for $j = 1$ **to** m **do**
    for $i = 1$ **to** n **do**
        $A[1][j] \leftarrow A[1][j] + A[i][j]$
    if $A[1][j] \neq 0$ **then**
        for $k = 1$ **to** j **do**
            $A[1][j] \leftarrow A[1][j] + A[1][k]$

Da notare che i tre cicli For *non sono tutti annidati*. Gli ultimi due cicli For sono indipendenti, ma sono entrambi annidati nel ciclo For più esterno. Per semplicità assumiamo che gli assegnamenti $A[1][j] \leftarrow A[1][j]+A[i][j]$ e $A[1][j] \leftarrow A[1][j]+A[1][k]$ abbiano costo costante uguale a 1. Il caso peggiore è quello in cui la condizione dell'If è sempre verificata, e l'ultimo ciclo For viene eseguito ad ogni iterazione del ciclo For più esterno. Scriviamo la funzione di costo dell'algoritmo come funzione di n e m.

$$\begin{aligned}
T(n,m) &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{m} n + \sum_{j=1}^{m} j \\
&= m \cdot n + m^2 \\
&= \Theta(m \cdot n) + \Theta(m^2).
\end{aligned}$$

(Caso 1) Se $n = O(m)$, si può dire che $T(n,m) = \Theta(m^2)$? In $T(n,m)$ l'addendo $\Theta(m^2)$ resta invariato. $n = O(m)$ implica che

$$m \cdot n = m \cdot O(m) = O(m \cdot m).$$

Abbiamo allora che $T(n,m) = O(m^2)+\Theta(m^2)$, dunque $T(n,m) = O(m^2)+O(m^2)$, e dunque $T(n,m) = O(m^2)$. D'altra parte abbiamo anche $T(n,m) = \Omega(m^2)$, perché $T(n,m) = O(m^2) + \Theta(m^2) \geq \Theta(m^2)$, e ogni funzione in $\Theta(m^2)$ è anche $\Omega(m^2)$. Dunque in questo caso $T(n,m) = \Theta(m^2)$.

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it.

(Caso 2) Se $n = \Theta(m)$, si può dire che $T(n,m) = \Theta(m^2)$? $n = \Theta(m) \Rightarrow m \cdot n = \Theta(m^2)$, e dunque $T(n,m) = \Theta(m^2) + \Theta(m^2)$, e dunque $T(n,m) = \Theta(m^2)$ (sommando un *numero costante* – in questo caso due – di termini con una certa complessità asintotica si ottiene una funzione con la stessa complessità asintotica).

(Caso 3) Se $n = \Omega(m)$, si può dire che $T(n,m) = \Theta(m^2)$? $n = \Omega(m) \Rightarrow m \cdot n = m \cdot \Omega(m) = \Omega(m \cdot m)$, e dunque $T(n,m) = \Omega(m^2) + \Theta(m^2)$. Da questo segue $T(n,m) = \Omega(m^2)$, ma non c'è modo di dedurre che $T(n,m) = O(m^2)$. Il secondo addendo $\Theta(m^2)$ è sicuramente $O(m^2)$ ma del primo addendo abbiamo soltanto una limitazione inferiore. Una generica funzione $f(m) = \Omega(m^2)$ può crescere molto più di un polinomio quadratico! Per esempio, 2^m è $\Omega(m^2)$. In questo caso *non possiamo concludere* $T(n,m) = \Theta(m^2)$.

Regole generali Enunciamo alcune regole generali per la manipolazione di equazioni contenenti Θ, O, Ω, utili per la soluzione di esercizi come il precedente.

Scrivere $T(n,m) = O(p(n,m)) + \Theta(q(n,m))$ significa asserire che *esistono* due funzioni $f(n,m), g(n,m)$ tali che $f(n,m) = O(p(n,m))$ e $g(n,m) = \Theta(q(n,m))$ e tali che $T(n,m) = f(n,m) + g(n,m)$.

La seconda eguaglianza in $T(n,m) = O(p(n,m)) + \Theta(q(n,m)) = \Omega(r(n,m)$ significa asserire che, *per ogni* scelta di funzioni $f(n,m), g(n,m)$ tali che $f(n,m) = O(p(n,m))$ e $g(n,m) = \Theta(q(n,m))$, *esiste* una scelta di una funzione $h(n,m)$ tale che $h(n,m) = \Omega(r(n,m))$ tali che $f(n,m) + g(n,m) = \Omega(h(n,m))$.

In generale si può dimostrare quanto segue (Esercizio!)

$$f(n) = O(p(n)), g(n) = O(q(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) = O(\max\{p(n), q(n)\})$$

$$f(n) = O(p(n)), g(n) = O(q(n)) \Rightarrow f(n) \cdot g(n) = O(p(n) \cdot q(n))$$

Le stesse implicazioni valgono per Θ e Ω.

Discussione Un errore molto comune è stato quello di considerare i tre cicli come annidati. In questo caso (se non fosse presente la riga con il comando If), la complessità andrebbe stimata come segue.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} 1 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} j \\
&= \sum_{j=1}^{m} n \cdot j \\
&= n \cdot \sum_{j=1}^{m} j \\
&= n \cdot \frac{m \cdot (m+1)}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 3

algoritmo *test*(n)
if $n \leq 1$ **then**
    return
for $i = 1$ **to** 3 **do**
    test$(n-1)$

Possiamo scrivere l'equazione di ricorrenza come segue.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) \text{ se } n \leq 1 \\ 3 \cdot T(n-1) + c \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione di ricorrenza per iterazione

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n-1) + c \\ &= 3\,(3 \cdot T(n-2) + c) + c \\ &= 3\,(3\,(3 \cdot T(n-3) + c) + c) + c \\ &= 3^3 \cdot T(n-3) + 3^2 \cdot c + 3 \cdot c + c \\ &\dots \\ &= 3^i \cdot T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 3^j \cdot c \end{aligned}$$

La ricorrenza termina quando $T(n-i) = 1$, ossia per $i = n-1$. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^{n-1} \cdot T(1) + \sum_{j=0}^{n-2} 3^j \cdot c \\ &= 3^{n-1}\Theta(1) + c \cdot \left(\frac{3^{n-1} - 1}{2} \right) \\ &= 3^{n-1}\Theta(1) + \frac{c}{2} 3^{n-1} - \frac{c}{2} \\ &= \Theta(3^{n-1}) \end{aligned}$$

Discussione Un errore molto frequente è stato quello di svolgere la ricorrenza come segue.

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n-1) + c \\ &= 3 \cdot 3T(n-2) + c + c \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3T(n-3) + c + c + c \\ &\dots \\ &= 3^i \cdot T(n-i) + i \cdot c \end{aligned}$$

La complessità dell'algoritmo risultava la stessa in questo caso, ma l'errore rimane!

Un altro errore frequente è stato quello di *generalizzare in modo scorretto*. Trovare l'espressione per il termine generico della ricorrenza non è un processo del tutto meccanico, e occorre prestare particolare attenzione alle *dipendenze funzionali.* Un esempio. Svolgendo correttamente l'equazione di ricorrenza corretta per l'Esercizio 3 *fino al terzo termine* otteniamo l'espressione seguente.

$$3^3 \cdot T(n-3) + 3^2 \cdot c + 3 \cdot c + c.$$

Vogliamo astrarre da questo termine per ottenere la forma del termine generico al passo i-esimo della ricorrenza. Vogliamo ottenere un'espressione per il termine generico *come funzione* di i. Ovviamente esistono molti modi di astrarre dal termine qui sopra. In particolare, qualcuno ha concluso che la forma del termine generico è la seguente.

$$3^i \cdot T(n-i) + 3^2 \cdot c + 3 \cdot c + c.$$

Questa formula mostra una dipendenza da i e non contraddice la forma del termine da cui è ottenuta. Ciò non ostante, si è persa una dipendenza funzionale da i, ossia la dipendenza da i della lunghezza della somma $3^2 \cdot c + 3 \cdot c + c$. Che la lunghezza di questa somma dipenda da i risulta ovvio osservando il termine precedente della ricorrenza (quello corrispondente a $i = 2$), che è

$$3\,(3 \cdot T(n-2) + c) + c = 3^2 T(n-2) + 3 \cdot c + c.$$

Risulta ancora più chiaro svolgendo un passo ulteriore della ricorrenza (per $i = 4$), ottenendo quanto segue.

$$3^3 \cdot (3T(n-4) + c) + 3^2 \cdot c + 3 \cdot c + c = 3^4 T(n-4) + 3^3 c + 3^2 c + 3c + c.$$

In generale, nello svolgere le ricorrenze si deve stare attenti a non perdere le dipendenze funzionali. A questo scopo, se avete dei dubbi sulla forma del termine generico che avete astratto, svolgete la ricorrenza per uno o due passi ulteriori!