ESERCITAZIONI DI *INTRODUZIONE AGLI ALGORITMI* (A.A. 09/10, CANALE E-O)

APPUNTI ESERCITAZIONE N. 2 (23 MARZO 2010)

1. Complessità dei Polinomi

Ricordiamo le relazioni viste la volta scorsa tra limite del rapporto f/g e relazioni O, Ω, Θ tra f e g:

(1) Se $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = \ell > 0$, allora $f(n) = \Theta(g(n))$.
(2) Se $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$, allora $f(n) \ll g(n)$.
(3) Se $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = \infty$, allora $g(n) \ll f(n)$.

Con il metodo analitico, usando queste implicazioni, possiamo semplificare notevolmente la dimostrazione che ogni polinomio di grado d è in $\Theta(n^d)$ (già dimostrata per induzione).

Teorema 1.1 (Crescita di un polinomio)**.** *Ogni polinomio di grado $d \geq 0$ cresce come n^d.*

Dimostrazione. Un polinomio di grado d ha la forma

$$p(n) = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + \ldots + a_{d-1} \cdot n^{d-1} + a_d \cdot n^d = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot n^i,$$

dove assumiamo che $a_d > 0$. Dimostriamo che vale $p(n) = \Theta(n^d)$ mostrando che il limite di $p(n)/n^d$ è finito e > 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=d} a_i \cdot n^i}{n^d} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_d \cdot n^d + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{n^d} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_d + \cdots + \frac{a_2}{n^{d-2}} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \frac{a_0}{n^d} \\
&= a_d
\end{aligned}$$

Dato che $a_d > 0$, deduciamo (dalla implicazione (1) sopra) che $p(n) = \Theta(n^d)$. □

Dimostriamo ora un risultato che ci permette di confrontare polinomi di gradi diversi.

Proposizione 1.2 (Confronti tra polinomi)**.** *Se $p(n)$ è un polinomio di grado d allora*

(1) *Se $d < c$ allora $p(n)$ è strettamente più lento di n^c,*
(2) *Se $d > c$ allora $p(n)$ è strettamente più veloce di n^c.*

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it.

Dimostrazione. Vogliamo considerare il limite del rapporto $p(n)/n^c$. Per appoggiarci su quanto già sappiamo del limite del rapporto $p(n)/n^d$ dal Teorema precedente, cominciamo riscrivendo banalmente l'espressione $p(n)/n^c$ come segue.

$$\frac{p(n)}{n^c} = p(n) \cdot n^{-c} = p(n) \cdot n^{-d+d} \cdot n^{-c} = \frac{p(n)}{n^d} \cdot n^{d-c}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^c} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^d} \cdot n^{d-c} = a_d \cdot \lim_{n\to\infty} n^{d-c},$$

con $a_d > 0$.

Se $c > d$ allora $d - c$ è negativo e abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^c} = \lim_{n\to\infty} n^{d-c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{c-d}} = 0.$$

Dunque (cfr. implicazione (2) sopra) $p(n) = O(n^c)$ ma $n^c \neq O(p(n))$.

Se $c < d$ allora $d - c$ è positivo e abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^c} = \lim_{n\to\infty} n^{d-c} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{d-c}}{1} = +\infty.$$

Dunque (cfr. implicazione (3) sopra)$p(n) = \Omega(n^c)$ ma $n^c \neq \Omega(p(n))$.

□

2. Classi di complessità

Le funzioni che incontreremo nel nostro studio degli algoritmi sono tipicamente: logaritmi, polinomi, esponenziali, fattoriali. Analizzando una funzione di costo f_A associata a un algoritmo, siamo interessati a sapere se essa appartiene alla classe delle funzioni logaritmiche, polinomiali, etc. Dobbiamo dimostrare che questa classificazione delle funzioni ha senso. Lo faremo mostrando che ogni funzione di una classe è *strettamente* più lenta o *strettamente* più veloce di ogni funzione di un'altra classe. Le classi in questione rispecchiano dunque dei tipi fondamentalmente diversi di crescita asintotica, e dunque di efficienza algoritmica.

In particolare abbiamo quanto segue.

- Ogni logaritmo è strettamente più lento di qualunque polinomio,
- Ogni polinomio è strettamente più lento di qualunque esponenziale,
- Ogni esponenziale è strettamente più lento del fattoriale.

Più precisamente, per $b > 0$, $a > 1$,

$$\boxed{\log(n) \ll n^b \ll a^n \ll n!}$$

Queste separazioni si ottengono dimostrando i seguenti limiti seguenti: per $b > 0$, $a > 1$,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.}$$

Le dimostrazioni sono state omesse a lezione. Le includiamo qui per completezza.

Cominciamo col dimostrare che ogni polinomio cresce più lentamente di ogni funzione esponenziale $n \mapsto a^n$ in base $a > 1$. Basta dimostrare che, per ogni $a > 1$, $b > 0$, vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty.$$

Usiamo il cosidetto *Criterio del Rapporto*, ossia ricaviamo il limite per la successione $g(n) = \frac{a^n}{n^b}$ dal limite dei rapporti tra i suoi termini consecutivi, ossia da

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b}}{\frac{a^n}{n^b}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}n^b}{(n+1)^b a^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^b \\
&= \lim_{n\to+\infty} a \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^b} \\
&= \lim_{n\to+\infty} a \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b} \\
&= a
\end{aligned}$$

Dal fatto che il limite dei rapporti è $a > 1$, possiamo dedurre che il limite della successione è $+\infty$, per il seguente Criterio del Rapporto.

Lemma 2.1 (Criterio del Rapporto, versione 1)**.** *Sia $g(n)$ una successione a termini positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \ell > 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$.*

Dimostrazione. Scegliamo a strettamente tra 1 e ℓ. Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \ell$, esiste N tale che per ogni $n \geq N$ vale $\frac{g(n+1)}{g(n)} > a$. Dunque

$$(\forall n \geq N)[g(n+1) > a \cdot g(n)].$$

Dunque, per ogni $m > 0$,

$$g(N+m) > a \cdot g(N+m-1) > a \cdot a \cdot g(N+m-2) > \cdots > (a)^m \cdot g(N).$$

Ma $\lim_{n\to+\infty}(a)^m = +\infty$, perché $a > 1$. Perciò anche $\lim_{m\to+\infty} g(N+m) = +\infty$. $\square$

Analogamente possiamo dimostrare che la funzione fattoriale cresce più velocemente di ogni funzione esponenziale. Possiamo dimostrare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

usando la seguente versione duale del Criterio del Rapporto:

Lemma 2.2 (Criterio del Rapporto, versione 2)**.** *Sia $g(n)$ una successione a termini positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$.*

Dimostrazione. Scegliamo a strettamente tra 0 e 1. Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = 0$, esiste N tale che per ogni $n \geq N$ vale $\frac{g(n+1)}{g(n)} < a$. Dunque

$$(\forall n \geq N)[g(n+1) < a \cdot g(n)].$$

Dunque, per ogni $m > 0$,

$$g(N+m) < a \cdot g(N+m-1) < a \cdot a \cdot g(N+m-2) < \cdots < a^m \cdot g(N).$$

Ma $\lim_{n\to+\infty} a^m = 0$, perché $0 < a < 1$, e perciò anche $\lim_{m\to+\infty} g(N+m) = 0$. $\square$

Consideriamo ora la successione dei rapporti.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1} n!}{(n+1)! a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Il confronto tra logaritmi e polinomi si può ottenere dal rapporto tra polinomi ed esponenziali. Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n},$$

sostituendo $\log(n)$ a n e 2^a ad a, abbiamo

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{(2^a)^{\log(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{(2^{\log(n)})^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^a}.$$

Il rapporto si può dimostrare anche direttamente. Un approccio passo per passo al problema è delineato nel seguente esercizio.

Esercizio 2.3. Assumendo che $\log(n) \leq n$.

(1) Si dimostri che $\log(n) \leq \frac{n^t}{t}$ per ogni $n \geq 1$ per ogni $t \geq 1$.
(2) Si dimostri che $\frac{\log(n)}{n^a} \leq \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{n^{a/2}}$, per ogni $n \geq 1$.
(3) Si dimostri che per ogni $a > 0$, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $N > 0$ tale che per ogni $n \geq N$ $\frac{\log(n)}{n^a} \leq \epsilon$.

3. Crescita dei numeri di Fibonacci

Dimostriamo che la funzione di Fibonacci $n \mapsto F_n$ è esponenziale. Più precisamente dimostriamo che la funzione $n \mapsto F_n$ è limitata inferiormente da una funzione esponenziale $a \mapsto a^n$ per un $a > 1$. Vediamo due dimostrazioni (la prima è analitica; la seconda è più semplice ma dimostra un risultato leggermente più debole).

Avete visto a lezione la formula chiusa per l'n-esimo numero di Fibonacci, i.e.,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n),$$

dove $\phi \approx 1.618\ldots$ e $\hat{\phi} \approx -0.618\ldots$. Dimostriamo che $F_n = \Omega(\phi^n)$.

Per dimostrare $F_n = \Omega(\phi^n)$ dobbiamo dimostrare che esiste $c > 0$ e $N > 0$ tali che per ogni $n \geq N$ vale

$$0 \leq c \cdot \phi^n \leq F_n.$$

Dimostriamo che $f(n) = (\phi^n - \hat{\phi}^n) \in \Omega(\phi^n)$. Allora anche $F(n)$ - che è una variante moltiplicativa positiva - di $f(n)$ è in $\Omega(\phi^n)$.

Consideriamo il termine $\hat{\phi}^n$. Dal fatto che $\hat{\phi} \in (-1, 1)$ possiamo immediatamente concludere che $\lim_{n\to\infty} \hat{\phi}^n = 0$. Ci basta qui osservare che $|\hat{\phi}^n| < 1$, per ogni $n > 0$. Dunque $\phi^n - \hat{\phi}^n$ è uguale $\phi^n - |\hat{\phi}^n|$ oppure a $\phi^n + |\hat{\phi}^n|$ (a seconda del segno di $\hat{\phi}^n$, che alterna). In entrambi i casi abbiamo

$$\phi^n - \hat{\phi}^n \geq \phi^n - |\hat{\phi}|^n > \phi^n - 1.$$

Ora ci resta da limitare inferiormente $\phi^n - 1$ con un $c \cdot \phi^n$ per un opportuno c positivo. Proviamo con $\frac{1}{2}\phi^n$. Vogliamo allora dimostrare che esiste un $N > 0$ tale che per ogni $n \geq N$,

$$\phi^n - 1 \geq \phi^n - \frac{1}{2}\phi^n = \frac{1}{2}\phi^n.$$

Basta che N sia tale che per ogni $n \geq N$ $\frac{1}{2}\phi^n > 1$, i.e., $\phi^n > 2$. Ovviamente esiste un tale N, dato che $\lim_{n\to\infty} \phi^n = \infty$. Riassumendo, per ogni $n \geq N$ vale

$$\begin{aligned} \phi^n - \hat{\phi}^n &> \phi^n - |\hat{\phi}^n| \\ &> \phi^n - 1 \\ &\geq \phi^n - \frac{1}{2}\phi^n \\ &= \frac{1}{2}\phi^n. \end{aligned}$$

Un approccio differente (induttivo) è il seguente, che ci dà una limitazione inferiore più debole della precedente. Usiamo la definizione ricorsiva di F_n invece della formula chiusa. $F_1 = F_2 = 1$, $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$. Cerchiamo di sfruttare la seguente osservazione ovvia:

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \geq F_i + F_i = 2 \cdot F_i.$$

Consideriamo i primi valori della serie, e vediamo che limitazione inferiore esponenziale vale banalmente.

$$F_1 = F_2 = 1 \geq 2^0,$$
$$F_3 = F_1 + F_2 = 2 \geq 2^1, F_4 = F_3 + F_2 \geq F_2 + F_2 = 2 \geq 2^1,$$
$$F_5 = F_4 + F_3 \geq F_3 + F_3 = 2 + 2 \geq 2^2, F_6 = F_5 + F_4 \geq F_4 + F_4 = 3 + 3 \geq 2^2,$$
$$F_7 = F_6 + F_5 \geq F_5 + F_5 = 5 + 5 \geq 2^3, F_8 = F_7 + F_6 \geq F_6 + F_6 = 8 + 8 \geq 2^3, etc.$$

Dimostriamo che la situazione si generalizza: per ogni $i \geq 0$, vale

$$F_{i+2} \geq 2^{i/2}.$$

La dimostrazione è per induzione su $i \geq 0$.

Base dell'induzione: Per $i = 0$ abbiamo

$$F_{i+2} = F_{0+2} = F_2 = 1 \geq 2^0 = 2^{0/2} = 2^{i/2}.$$

Per $i = 1$ abbiamo

$$F_{i+2} = F_{1+2} = F_2 + F_1 = 2 = 2^1 \geq 2^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Passo induttivo: Sia $i > 1$.

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \geq F_i + F_i = 2 \cdot F_i \geq 2 \cdot 2^{\frac{i-2}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{i}{2}-1} = 2^{i/2}.$$

Qui sopra il passo $2 \cdot F_i \geq 2 \cdot 2^{\frac{i-2}{2}}$ vale per ipotesi induttiva (da notare che $i - 2 \geq 0$ perché stiamo trattando il caso $i > 1$ e abbiamo trattato esplicitamente i casi $i = 0, 1$ come basi dell'induzione).

Abbiamo con ciò dimostrato che $F_{i+2} \geq 2^{i/2}$, dunque $F_{i+2} = \Omega(\sqrt{2}^i)$.