

**ESERCITAZIONI DI INTRODUZIONE AGLI ALGORITMI**  
**(A.A. 09/10, CANALE E-O)**

APPUNTI ESERCITAZIONE N. 1 (16 MARZO 2010)

1. ANALISI DELL'EFFICIENZA DI UN ALGORITMO

Dobbiamo introdurre gli strumenti matematici necessari per valutare l'efficienza di un algoritmo. In generale vogliamo stimare la quantità di risorse (spazio, tempo, etc.) necessarie all'esecuzione di un algoritmo in funzione della dimensione di una istanza (i.e., della dimensione di un input).

Negli esempi visti a lezione avete considerato programmi in pseudo-codice con un input intero  $n$  e calcolato, in funzione di  $n$ , il numero di linee di codice mandate in esecuzione. Negli esercizi assegnati avete considerato programmi in pseudo-codice con un input intero  $n$  e calcolato, in funzione di  $n$ , il numero di volte che veniva stampata la stringa "Hello world".

In entrambi i casi abbiamo fissato: (i) *un modello di calcolo* (i programmi in pseudo-codice), (ii) *il tipo di risorsa* che siamo interessati a misurare (numero di linee di codice in un caso, numero di stampe della stringa "Hello world" nell'altro), e (iii) *una misura* della dimensione dell'input (semplicemente il valore dell'intero  $n$  in input).

In entrambi i casi, ci interessava trovare un'espressione per la funzione che calcola la quantità di risorse necessarie all'esecuzione dell'algoritmo in dipendenza della dimensione dell'input. Ossia: siamo interessati all'andamento della funzione non ai singoli valori.

Questi sono esempi della situazione generale che ci interessa. Supponiamo di aver fissato un modello di calcolo e un modo di misurare la dimensione degli input, e di aver deciso quale tipo di risorsa ci interessa misurare. Allora, dato un problema  $P$  e un algoritmo  $A$  che lo risolve, possiamo studiare la funzione di costo  $f_A$ , che misura la quantità di risorse necessarie all'algoritmo  $A$  per risolvere il problema  $P$ , in dipendenza della dimensione delle istanze del problema  $P$  date in input ad  $A$ .

$$P \text{ (problema)} \hookrightarrow A \text{ (algoritmo)} \hookrightarrow f_A \text{ (funzione di costo)}.$$

Una volta estratta una funzione di costo  $f_A$  da un algoritmo  $A$ , vogliamo essere in grado di fare quanto segue.

- (1) Confrontarne la crescita con quella di altre funzioni.
- (2) Classificarla in una gerarchia di classi di complessità (e.g., logaritmica, lineare, polinomiale, esponenziale, etc.) che catturano differenti livelli di efficienza.

2. LIMITI SUPERIORI, INFERIORI ED ESATTI,  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$ 

Date due funzioni di costo  $f$  e  $g$  ottenute analizzando, rispettivamente, un algoritmo  $A$  e un algoritmo  $B$  (per lo stesso problema  $P$  o per problemi diversi), vogliamo distinguere i seguenti casi fondamentali.

- (1)  $f$  cresce *al massimo* come  $g$ ,
- (2)  $f$  cresce *almeno* come  $g$ ,
- (3)  $f$  *esattamente* come  $g$ ,
- (4)  $f$  è *strettamente più veloce* di  $g$ ,
- (5)  $f$  è *strettamente più lenta* di  $g$ .

Vediamo qui sotto come formalizzare i primi tre casi. In generale consideriamo funzioni  $f, g$  con argomenti interi non negativi e valori reali (in molti casi ci ridurremo a valori interi). Consideriamo per primo il concetto: “ $f$  cresce al massimo come  $g$ ”.

Sicuramente vogliamo dire che  $f$  cresce al massimo come  $g$  se vale la seguente proprietà.

$$\forall n[f(n) \leq g(n)].$$

In questo caso il grafico di  $f$  non va mai sopra al grafico di  $g$ . Vogliamo però trascurare il comportamento di  $f$  e di  $g$  su un numero finito di argomenti iniziali. Per esempio, se per i primi 100 argomenti  $f$  ha un comportamento bizzarro e il suo grafico salta da sotto a sopra il grafico di  $g$ , ma da 100 in poi il grafico di  $f$  mostra un andamento regolare e non supera mai il grafico di  $g$ , allora vogliamo ancora dire che  $f$  cresce al massimo come  $g$ .

$$(\exists N)(\forall n \geq N)[f(n) \leq g(n)].$$

L'ultimo passo è quello di trascurare le costanti moltiplicative positive: se la proprietà qui sopra vale, invece che per  $g(n)$ , per una sua variante moltiplicativa positiva qualunque  $c \cdot g(n)$  (con  $c > 0$  non dipendente da  $n$ ), allora diciamo comunque che  $f$  cresce al massimo come  $g$ . Otteniamo così la proprietà seguente.

$$(\exists c > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[f(n) \leq g(n)].$$

Abbiamo ottenuto - a meno di un paio di dettagli tecnici - la seguente definizione formale.

**Definizione 2.1** (Limitazione Superiore). Diciamo che  $g(n)$  è una *limitazione superiore* (*upper bound*) per  $f(n)$ , e scriviamo  $f(n) = O(g(n))$ , se e solo se

$$(\exists c > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)[0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)].$$

Diciamo in questo caso che  $f(n)$  *cresce al massimo come*  $g(n)$ .

Intuitivamente,  $f(n) = O(g(n))$  vale quando il grafico di  $f(n)$  si trova, da un certo punto in poi, sotto a una variante moltiplicativa (positiva) del grafico di  $g(n)$  (o coincide con una tale variante).

**Osservazione 2.2.** Le funzioni che usiamo per l'analisi degli algoritmi (polinomi, logaritmi, esponenziali, fattoriali) sono tutte *asintoticamente non negative*, ossia hanno sempre valori  $\geq 0$  da un certo punto in poi (come è naturale, dato che sono le funzioni che usiamo per stimare il costo computazionale degli algoritmi!). La condizione  $0 \leq f(n)$  nella definizione qui sopra equivale a chiedere che  $N$  sia scelto oltre questo punto ed è richiesto per convenienza tecnica. Anche la richiesta che  $N > 0$  è per convenienza tecnica (e.g., evitare problemi di funzioni indefinite su 0).

**Osservazione 2.3.** Se  $f(n) = O(g(n))$ , niente nella definizione di questa relazione ci garantisce che la stima sia stretta (ossia che  $f$  sia strettamente più lenta di  $g$ ) né che questa limitazione sia ottima (ossia che non possa esistere un'altra funzione  $h(n)$ , strettamente più lenta di  $g$ , per cui anche valga  $f(n) = O(h(n))$ ). Le stime con  $O$  sono sempre *stime per eccesso*, se non specificato altrimenti.

In molti casi ci interessa dare una limitazione inferiore alla complessità di un algoritmo, ossia indicare una funzione  $g(n)$  tale che il nostro algoritmo cresce almeno quanto  $g(n)$ . La definizione seguente formalizza il concetto intuitivo: “ $f$  cresce almeno quanto  $g$ ”.

**Definizione 2.4** (Limitazione Inferiore). Diciamo che  $f(n)$   $g(n)$  è una *limitazione inferiore* (*lower bound*) per  $f(n)$  e scriviamo  $f(n) = \Omega(g(n))$  se e solo se vale

$$(\exists c > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)[0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)].$$

Diciamo in questo caso che  $f(n)$  *cresce almeno come*  $g(n)$ .

Intuitivamente,  $f(n) = \Omega(g(n))$  vale quando il grafico di  $f(n)$  si trova, da un certo punto in poi, sopra a una variante moltiplicativa (positiva) del grafico di  $g(n)$  (o coincide con una tale variante).

Analogamente a quanto osservato per  $O(\cdot)$ , la relazione  $f(n) = \Omega(g(n))$  non garantisce né che  $g(n)$  sia un limite inferiore stretto né che sia un limite inferiore ottimo per  $f(n)$ . Le stime con  $\Omega$  sono in generale *stime per difetto*.

Se per una data funzione di costo  $f(n)$  riusciamo a stabilire sia una limitazione superiore  $f(n) = O(g(n))$  che una limitazione inferiore  $f(n) = \Omega(h(n))$  per due funzioni  $g(n)$ ,  $h(n)$ , allora significa che abbiamo ‘stretto’ il grafico di  $f(n)$  - da un certo punto in poi - tra i grafici di  $c \cdot g(n)$  e di  $d \cdot h(n)$ , per oppurtne costanti  $c, d > 0$ . Quanto più simili sono gli andamenti asintotici di  $g(n)$  e di  $h(n)$ , tanto più questo ci dà un’idea precisa dell’andamento asintotico di  $f(n)$ . Se  $g(n)$  e  $h(n)$  sono la stessa funzione, possiamo dire di avere un’idea esatta dell’andamento asintotico di  $f(n)$ , il cui grafico si trova compreso tra due varianti moltiplicative della stessa funzione  $g(n)$ . Si verifica facilmente (Esercizio!) che la condizione  $f(n) = O(g(n)) \& f(n) = \Omega(g(n))$  equivale alla condizione espressa nella seguente definizione.

**Definizione 2.5** (Limitazione Esatta). Diciamo che  $f(n)$  è una *limitazione esatta* per  $f(n)$  e scriviamo  $f(n) = \Theta(g(n))$  se e solo se vale

$$(\exists c > 0)(\exists c' > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)[0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)].$$

Diciamo in questo caso che  $f(n)$  *cresce esattamente come*  $g(n)$ .

**Osservazione 2.6.** Esiste una dualità tra  $O$  e  $\Omega$ . Questa dualità riflette la logica intuitiva di questi concetti. Se  $f$  cresce al massimo come  $g$  è ovvio che  $g$  cresce almeno come  $f$ , e viceversa. Formalmente, questo si riflette nelle seguenti implicazioni.

- Se  $f(n) = O(g(n))$  allora  $g(n) = \Omega(f(n))$ .
- Se  $f(n) = \Omega(g(n))$  allora  $g(n) = O(f(n))$ .

Esercizio: dimostrare formalmente le due implicazioni qui sopra.

### 3. METODO ALGEBRICO, POLINOMI

In alcuni casi si possono dimostrare limitazioni superiori, inferiori e ottime con semplici manipolazioni algebriche, in sostanza risolvendo disequazioni elementari. Abbiamo visto alcuni esempi.

**Esempio 3.1.** Sia  $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 5n$ . Dimostrare che  $f(n) = O(n^2)$  usando la definizione di limitazione superiore. Dobbiamo trovare  $c > 0$  e  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  valga

$$0 \leq \frac{1}{4}n^2 - 5n \leq c \cdot n^2.$$

Per soddisfare la disequazione più a sinistra  $N$  deve soddisfare: per ogni  $n \geq N$ ,

$$5n \leq \frac{1}{4}n^2,$$

ossia  $20n \leq n^2$ , ossia  $20 \leq n$ . Dunque sceglieremo  $N$  almeno 20. Per soddisfare la disequazione a destra basta trovare  $c > 0$  tale che  $\frac{1}{4}n^2 - 5n \leq c \cdot n^2$ . Ma questo è ovvio per  $c = \frac{1}{4}$ . La scelta  $N = 20$  e  $c = \frac{1}{4}$  soddisfa i vincoli richiesti dalla definizione.

**Esempio 3.2.** Dimostriamo che vale anche  $n^2 = O(\frac{1}{4}n^2 - 5n)$ . Esibiamo  $c > 0$ ,  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$ , vale

$$0 \leq n^2 \leq c(\frac{1}{4}n^2 - 5n).$$

Dividendo per  $n^2$  la seconda disequazione otteniamo

$$1 \leq c(\frac{1}{4} - \frac{5}{n}).$$

Scegliamo  $c = 8$ , così che basta trovare un  $N > 0$  tale che per ogni  $n \geq N$  valga

$$1 \leq \frac{8}{4} - \frac{40}{n}.$$

Basta che sia  $\frac{40}{n} \leq 1$ .  $N = 40$  è sufficiente.

**Esempio 3.3.** Dimostriamo che  $8n^4 \neq O(n^3)$ . Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che valga  $8n^4 = O(n^3)$  e deduciamo una contraddizione. Per definizione esistono  $c > 0$  e  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  vale

$$8n^4 \leq c \cdot n^3.$$

Ma dividendo per  $n^3$  questo implica che per ogni  $n \geq N$  vale

$$8n \leq c.$$

Dato che  $c$  è una costante positiva, è impossibile che il prodotto  $8n$  resti sempre sotto  $c$ .

Analogamente dimostriamo che  $n^3 \neq O(8n^4)$ . Supponiamo il contrario. Allora esistono  $c > 0$  e  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  vale

$$0 \leq c \cdot 8n^4 \leq n^3.$$

Dividendo per  $n^3$  abbiamo che per ogni  $n \geq N$  dovrebbe valere

$$c \cdot n \leq 1,$$

il che è impossibile.

**Osservazione 3.4.** Negli esempi visti il grado del polinomio dà un limite esatto. Vale in generale? Sì, e possiamo dimostrarlo per induzione con metodo algebrico.

**Teorema 3.5.** *Ogni polinomio di grado  $d \geq 0$  cresce come  $n^d$ .*

*Dimostrazione.* Un polinomio di grado  $d$  ha la forma

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i \cdot n^i,$$

dove assumiamo che  $a_d > 0$ . Dimostriamo per induzione su  $d$  che per ogni polinomio  $f(n)$  di grado  $d$  vale  $f(n) = \Theta(n^d)$ .

Caso  $d = 0$ : Esercizio!

Caso  $d = 1$ : Sia  $p(n) = a_1 n + a_0$ , con  $a_1 > 0$ . Dimostriamo che  $p(n) = O(n)$ . Cerchiamo  $c > 0$  e  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  vale

$$0 \leq a_1 n + a_0 \leq c \cdot n.$$

Per soddisfare  $0 \leq a_1 n + a_0$  basta che  $n \geq \frac{-a_0}{a_1}$  (se  $a_0$  è positivo questa condizione è soddisfatta sempre da  $n \geq 0$ ; se  $a_0$  è negativo deve essere  $n \geq \frac{|a_0|}{a_1}$ ). Sappiamo allora che dovremo scegliere  $N$  almeno  $\frac{-a_0}{a_1}$ . Per soddisfare il secondo vincolo  $a_1 n + a_0 \leq c \cdot n$  deve valere  $a_1 + a_0/n \leq c$ . Troviamo  $N$  tale che per ogni  $n \geq N$  valga  $a_0/n \leq 1$ . Per una tale scelta di  $N$  avremo

$$a_1 + a_0/n \leq a_1 + 1,$$

e basterà scegliere  $c = a_1 + 1$ .  $a_0/n \leq 1$  è soddisfatta se  $n \geq a_0$ . Dunque per soddisfare il secondo vincolo basterà scegliere  $N \geq a_0$ . Per soddisfare contemporaneamente i due vincoli discussi ( $0 \leq a_1 n + a_0$  e  $a_1 n + a_0 \leq c \cdot n$ ) scegliamo  $N$  come il massimo tra un valore che soddisfa il primo vincolo e un valore che soddisfa il secondo vincolo, i.e.,  $N = \max(\frac{-a_0}{a_1}, a_0)$ . Dato che  $a_0/n$  tende a 0 con  $n$  che va a infinito, possiamo scegliere  $c = a_1 + 1$  e  $N = a_0$ .

Dimostriamo che  $p(n) = \Omega(n)$ . Cerchiamo  $c > 0$  e  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  vale

$$0 \leq c \cdot n \leq a_1 n + a_0.$$

Se  $a_0 \geq 0$ , è ovvio, per qualunque  $c$  e qualunque  $N$ . Se  $a_0 < 0$ , cerchiamo  $c > 0$  e  $N > 0$  tali che per ogni  $n \geq N$  vale  $c \cdot n \leq a_1 n - |a_0|$ , ossia  $c \leq a_1 - |a_0|/n$ . Dato che  $c$  deve essere  $> 0$ , basta scegliere  $N$  tale che per ogni  $n \geq N$  vale  $a_1 - |a_0|/n > 0$ , ossia tale che  $a_1 > |a_0|/n$ , i.e., tale che  $a_1/|a_0| > 1/n$ , i.e., tale che  $|a_0|/a_1 < n$ .

Caso  $d > 1$ : Esercizio! □

#### 4. METODO ANALITICO E LIMITI DI SUCCESSIONI

In alternativa al metodo algebrico è spesso utile - e a volte necessario - usare metodi analitici (in particolare di analisi delle successioni, e alcuni limiti notevoli).

Se riconsideriamo gli esempi visti sopra ci accorgiamo che essenzialmente abbiamo considerato il limite di rapporti.

**Esempio 4.1.** Per dimostrare  $\frac{1}{4}n^2 - 5n = O(n^2)$  abbiamo diviso per  $n^2$ , considerando

$$\frac{\frac{1}{4}n^2 - 5n}{n^2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{n}}{1},$$

e abbiamo poi osservato che esiste un  $N$  tale che per ogni  $n \geq N$  il denominatore resta  $> 1$ . Questo significa essenzialmente considerare il limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}n^2 - 5n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{n}}{1} = \frac{1}{4}.$$

**Esempio 4.2.** Per dimostrare  $n^2 = O(\frac{1}{4}n^2 - 5n)$  abbiamo essenzialmente considerato il limite del rapporto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{4}n^2 - 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{5}{n}} = 4.$$

**Esempio 4.3.** Per dimostrare  $8n^4 \neq O(n^3)$  dividendo per  $n^3$  abbiamo essenzialmente considerato il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{1} = \infty.$$

Analogamente, per dimostrare  $n^3 \neq \Omega(8n^4)$  abbiamo considerato essenzialmente il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{8n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \frac{8n}{=} 0.$$

Riassumendo: in tutti gli esempi considerati abbiamo usato il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  del rapporto tra le due funzioni, e abbiamo incontrato tre casi:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell > 0$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Nei nostri esempi il primo caso corrisponde alle funzioni  $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 5n$  e  $g(n) = n^2$  per cui vale sia  $f(n) = O(g(n))$  che  $g(n) = O(f(n))$ , e dunque  $f(n) = \Theta(g(n))$ . Il secondo caso corrisponde alle funzioni  $f(n) = 8n^4$  e  $g(n) = n^3$ , per cui vale  $f(n) \neq O(g(n))$  e  $g(n) = O(f(n))$ . Il terzo caso - duale del precedente - corrispondeva alle funzioni  $f(n) = n^3$  e  $g(n) = 8n^4$ , per cui vale  $f(n^3) = O(g(n))$  e  $g(n) \neq O(f(n))$ .

Queste corrispondenze non sono casuali ma valgono in generale, come vedremo tra poco. Il limite del rapporto tra le successioni dei valori di due funzioni è sufficiente a stabilire il loro confronto asintotico.

**Osservazione 4.4.** Nelle considerazioni sui limiti che seguono, possiamo senza pregiudizio di generalità presupporre di avere a che fare con funzioni *sempre positive*. Dato che ci interessano solo le proprietà asintotiche delle funzioni, e che tutte le funzioni che incontreremo nell'analisi di algoritmi sono asintoticamente positive, ciò equivale a considerare l'andamento delle funzioni dopo il punto di positività. È un accorgimento tecnico che serve ad evitare casi di divisione per 0.

**Definizione 4.5** (Limiti di Successioni). Ricordiamo le definizioni di limiti nulli, infiniti, e finiti positivi per successioni numeriche.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 & \text{ se e solo se } (\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[f(n) < \epsilon]. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty & \text{ se e solo se } (\forall E > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[f(n) > E]. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell > 0 & \text{ se e solo se } (\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[\ell - \epsilon < f(n) < \ell + \epsilon]. \end{aligned}$$

Dimostriamo che valgono le seguenti relazioni tra i limiti di successioni e le notazioni asintotiche  $O, \Omega, \Theta$ .

**Proposizione 4.6** (Limiti dei rapporti e notazione asintotica).

- (1) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$  allora  $f(n) = O(g(n))$  e  $g(n) \neq O(f(n))$ .
- (2) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$  allora  $f(n) = \Omega(g(n))$  e  $g(n) \neq \Omega(f(n))$ .
- (3) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell > 0$  allora  $f(n) = \Theta(g(n))$ .

**Osservazione 4.7.** Dai punti (1) e (2) della proposizione precedente possiamo ricavare una controparte formale dei concetti “ $f$  è strettamente più lenta di  $g$ ” e “ $f$  è strettamente più veloce di  $g$ ”. Vogliamo riflettere la logica intuitiva: “ $f$  è strettamente più lenta di  $g$ ” se  $f$  cresce al massimo come  $g$  ma non è vero che  $g$  cresce al massimo come  $f$ . Analogamente vogliamo “ $f$  è strettamente più veloce di  $g$ ” se  $f$  cresce almeno come  $g$  ma non è vero che  $g$  non cresce almeno come  $f$ . Da ora in poi, quando diremo che “ $f$  è strettamente più lenta di  $g$ ” (indicato con  $f \ll g$ ) intenderemo  $f(n) = O(g(n))$  e  $g(n) \neq O(f(n))$ , e quando diremo che “ $f$  è strettamente più veloce di  $g$ ” (indicato con  $f \gg g$ ) intenderemo  $f(n) = \Omega(g(n))$  e  $g(n) \neq \Omega(f(n))$ .

Diamo la dimostrazione del punto (2) qui sopra. Scriviamo che la conclusione nella sua forma duale (usando la dualità tra  $O$  e  $\Omega$ ).

**Proposizione 4.8** (Limite Superiore Stretto). *Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ , allora  $g(n) = O(f(n))$  e  $f(n) \neq O(g(n))$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ . Dunque esiste  $N$  tale che per ogni  $n \geq N$  vale  $\frac{g(n)}{f(n)} \leq 1$ . Dunque  $g(n) \leq f(n)$ , il che dimostra  $g(n) = O(f(n))$ .

Se fosse  $f(n) = O(g(n))$ , esisterebbero  $c > 0$ ,  $N$ , tali che per ogni  $n \geq N$ ,  $f(n) \leq c \cdot g(n)$ , i.e.  $\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$ . Ma  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$  implica che, dato  $c$ , esiste  $N'$  tale che per ogni  $n \geq N'$ ,  $\frac{f(n)}{g(n)} > c$ . Contraddizione.  $\square$

**Esercizio:** Dimostrare che se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell > 0$ , allora  $f(n) = O(g(n))$  e  $g(n) = O(f(n))$ . Per il secondo fatto usare il fatto che, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{\ell}$ .

Con il metodo analitico molte dimostrazioni di limitazioni asintotiche si semplificano notevolmente. Dimostriamo l'esistenza di  $c > 0$  e  $N > 0$  come richiesto dalle definizioni senza aver bisogno di calcolarli esplicitamente.

**Esempio 4.9.**  $\frac{n^2}{4n^2+5n+6} = \frac{1}{4+5/n+6/n^2}$  che tende a  $1/4$  per  $n \rightarrow \infty$ . Dunque  $4n^2 + 5n + 6 = \Theta(n^2)$ .

## 5. CONCLUSIONE

Quando il limite del rapporto  $f(n)/g(n)$  è infinito o nullo, siamo di fronte a esempi di funzioni la cui crescita è *essenzialmente differente*. Useremo i risultati di sopra per dimostrare la *separazione* tra logaritmi, polinomi, esponenziali, fattoriali. Vedremo quanto segue.

- Ogni logaritmo è strettamente più lento di qualunque polinomio,
- Ogni polinomio è strettamente più lento di qualunque esponenziale,
- Ogni esponenziale è strettamente più lento del fattoriale.

Per ciò sarà sufficiente dimostrare i limiti seguenti: per  $b > 0$ ,  $a > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n^b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$