ESERCITAZIONI DI *INTRODUZIONE AGLI ALGORITMI* (A.A. 08/09, CANALE E-O)

DISPENSA N. 1

1. Limiti superiori, inferiori ed esatti, O, Ω, Θ

Definizione 1.1 (Limitazione Superiore)**.** Diciamo che $g(n)$ è una *limitazione superiore* (*upper bound*) per $f(n)$, e scriviamo $f(n) = O(g(n))$, se e solo se

$$(\exists c > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)[0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)].$$

Diciamo in questo caso che $f(n)$ *cresce al massimo come* $g(n)$.

Intuitivamente, $f(n) = O(g(n))$ vale quando il grafico di $f(n)$ si trova, da un certo punto in poi, sotto a una variante moltiplicativa (positiva) del grafico di $g(n)$ (o coincide con una tale variante).

Osservazione 1.2. Le funzioni che usiamo per l'analisi degli algoritmi (polinomi, logaritmi, esponenziali, fattoriali) sono tutte *asintoticamente non negative*, ossia hanno sempre valori ≥ 0 da un certo punto in poi (come è naturale, dato che sono le funzioni che usiamo per stimare il costo computazionale degli algoritmi!). La condizione $0 \leq f(n)$ nella definizione qui sopra equivale a chiedere che N sia scelto oltre questo punto ed è richiesto per convenienza tecnica.

Osservazione 1.3. Se $f(n) = O(g(n))$, niente nella definizione di questa relazione ci garantisce che la stima sia stretta (ossia che f sia strettamente più lenta di g) né che questa limitazione sia ottima (ossia che non possa esistere un'altra funzione $h(n)$, strettamente più lenta di g, per cui anche valga $f(n) = O(h(n))$.

In molti casi ci interessa dare una limitazione inferiore alla complessità di un algoritmo, ossia indicare una funzione $g(n)$ tale che il nostro algoritmo cresce almeno quanto $g(n)$. L'idea è formalizzata nella seguente definizione.

Definizione 1.4 (Limitazione Inferiore)**.** Diciamo che $f(n)$ $g(n)$ è una *limitazione inferiore* (*lower bound*) per $f(n)$ e scriviamo $f(n) = \Omega(g(n))$ se e solo se vale

$$(\exists c > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)[0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)].$$

Diciamo in questo caso che $f(n)$ *cresce almeno come* $g(n)$.

Intuitivamente, $f(n) = \Omega(g(n))$ vale quando il grafico di $f(n)$ si trova, da un certo punto in poi, sopra a una variante moltiplicativa (positiva) del grafico di $g(n)$ (o coincide con una tale variante).

Analogamente a quanto osservato per $O(\cdot)$, la relazione $f(n) = \Omega(g(n))$ non garantisce né che $g(n)$ sia un limite inferiore stretto né che sia un limite inferiore ottimo per $f(n)$.

Note preparate da Lorenzo Carlucci, carlucci@di.uniroma1.it.

Se per una data funzione di costo $f(n)$ riusciamo a stabilire sia una limitazione superiore $f(n) = O(g(n))$ che una limitazione inferiore $f(n) = \Omega(h(n))$ per due funzioni $g(n)$, $h(n)$, significa che abbiamo stretto il grafico di $f(n)$ - da un certo punto in poi - tra i grafici di $c \cdot g(n)$ e di $d \cdot h(n)$, per oppurtne costanti $c, d > 0$. Quanto più simili sono gli andamenti asintotici di $g(n)$ e di $h(n)$, tanto più questo ci dà un'idea precisa dell'andamento asintotico di $f(n)$. Se $g(n)$ e $h(n)$ sono la stessa funzione, possiamo dire di avere un'idea esatta dell'andamento asintotico di $f(n)$, il cui grafico si trova compreso tra due varianti moltiplicative della stessa funzione $g(n)$. Si verifica facilmente (Esercizio!) che la condizione $f(n) = O(g(n)) \& f(n) = \Omega(g(n))$ equivale alla condizione espressa nella seguente definizione.

Definizione 1.5 (Limitazione Esatta)**.** Diciamo che $f(n)$ è una *limitazione esatta* per $f(n)$ e scriviamo $f(n) = \Theta(g(n))$ se e solo se vale

$$(\exists c > 0)(\exists c' > 0)(\exists N > 0)(\forall n \geq N)[0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \leq c' \cdot g(n)].$$

Diciamo in questo caso che $f(n)$ *cresce esattamente come* $g(n)$.

2. Metodo Algebrico, Polinomi

In alcuni casi si possono dimostrare limitazioni superiori, inferiori e ottime con semplici manipolazioni algebriche, in sostanza risolvendo disequazioni elementari. Abbiamo visto alcuni esempi.

Esempio 2.1. Limitare superiormente il polinomio quadratico $f(n) = 4n^2 + 5n + 6$. Imponiamo la condizione desiderata, ossia la disequazione (*) $4n^2 + 5n + 6 \leq cn^2$ e troviamo $c > 0$ e N tali che (*) vale per ogni $n \geq N$. Possiamo osservare che $4n^2 + 5n + 6 = n^2(4 + 5/n + 6/n^2)$, e che per n abbastanza grande, $5/n + 6/n^2$ è strettamente minore di 2. Dunque per n abbastanza grande, $4n^2 + 5n + 6 = n^2(4 + 5/n + 6/n^2) \leq n^2(4 + 2)$ e possiamo prendere 6 come valore della costante moltiplicativa c cercata. Quanto grande deve essere N? Basta che soddisfi $5/n + 6/n^2 \leq 2$. Per esempio, $n \geq 5$ va bene! N.B. non abbiamo cercato di ottimizzare né c né N, ma solo di verificare la definizione di limite superiore!

Esempio 2.2. Limitare superiormente e inferiormente il polinomio quadratico $3n^2 - 20n$. Dimostriamo che $3n^2 - 20n = O(n^2)$. Facile: per ogni n vale $3n^2 - 20n \leq 3n^2$. Dimostriamo che $3n^2 - 20n = \Omega(n^2)$. Dobbiamo trovare $c > 0$ e $N > 0$ tali per ogni $n \geq N$ valga $cn^2 \leq 3n^2 - 20n$. Possiamo risolvere direttamente $0 < 3 - 20/n$, che vale sse $20/3 < n$. Abbiamo allora verificato la definizione con $c = 1$ e $N > 20/3$, e.g. $N = 7$.

Esempio 2.3. Dimostriamo che $4n^2 + 5n + 6 \neq O(n)$. Usando la definizione, questo significa dimostrare che per nessuna scelta di $c > 0$, $N > 0$, vale la relazione $4n^2 + 5n + 6 \leq c \cdot n$ per ogni $n \geq N$. Supponiamo per assurdo che esistano $c > 0$, $N > 0$ tali che, per ogni $n \geq N$, $4n^2 + 5n + 6 \leq c \cdot n$. Allora per tali n vale $4n + 5 + \frac{6}{n} \leq c$. Ma questo è impossibile, dato che per ogni $n > \frac{c-5}{4}$ vale $4n + 5 > c$.

Osservazione 2.4. Negli esempi visti il grado del polinomio dà un limite esatto. Vale in generale? Sì, e possiamo dimostrarlo per induzione con metodo algebrico.

Teorema 2.5. *Ogni polinomio di grado $d \geq 0$ cresce come n^d.*

Dimostrazione. Un polinomio di grado d ha la forma

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot n^i,$$

dove gli a_i sono interi e assumiamo che $a_d > 0$. Dimostriamo per induzione su d che per ogni polinomio $f(n)$ di grado d vale $f(n) = \Theta(n^d)$.

Caso $d = 0$: Esercizio!

Caso $d = 1$: Sia $p(n) = a_1 n + a_0$, con $a_1 > 0$. Dimostriamo che $p(n) = O(n)$. Cerchiamo $c > 0$ e $N > 0$ tali che per ogni $n \geq N$ vale $a_1 n + a_0 \leq c \cdot n$, ossia $a_1 + a_0/n \leq c$. Dato che a_0/n tende a 0 con n che va a infinito, possiamo scegliere $c = a_1 + 1$ e $N = a_0$. Dimostriamo che $p(n) = \Omega(n)$. Cerchiamo $c > 0$ e $N > 0$ tali che per ogni $n \geq N$ vale $c \cdot n \leq a_1 n + a_0$. Se $a_0 \geq 0$, è ovvio. Se $a_0 < 0$, cerchiamo $c > 0$ e $N > 0$ tali che per ogni $n \geq N$ vale $c \cdot n \leq a_1 n - |a_0|$, ossia $c \leq a_1 - |a_0|/n$. Dato che $|a_0|/n$ tende a 0 per n che tende a $+\infty$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che, per ogni $n \geq N$, $a_1 - \epsilon \leq a_1 - |a_0|/n$. Per qualunque scelta di $\epsilon > 0$ tale che $a_1 - \epsilon > 0$, la scelta di $c = a_1 - \epsilon$ e di $N = N_\epsilon$ verifica la relazione desiderata. Dato che $a_1 > 0$, esiste una tale scelta di ϵ.

Caso $d > 1$: Esercizio! □

3. Metodo Analitico e Limiti Notevoli

In alternativa al metodo algebrico è spesso utile - e a volte necessario - usare metodi analitici (in particolare di analisi delle successioni, e alcuni limiti notevoli).

Esempio 3.1. Consideriamo le funzioni $f(n) = 2^{\sqrt{n}} + 14n^5$ e $g(n) = 2^{\sqrt{n}}$. Proviamo a dimostrare che $f(n) = O(g(n))$. Possiamo porre $2^{\sqrt{n}} + 14n^5 \leq 2^{\sqrt{n}} + 2^{\sqrt{n}}$ e ridurci a chiedere se esiste N tale che per ogni $n \geq N$ valga $14n^5 \leq 2^{\sqrt{n}}$. Prendendo i logaritmi otteniamo $\log(14) + 5\log(n) \leq \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$. Per ogni $n \geq 14$ vale $\log(14) + 5\log(n) \leq 6\log(n)$ e possiamo chiederci se esiste un N tale che per ogni $n \geq N$ vale $6\log(n) \leq \sqrt{n}$, i.e. $\log(n) \leq \sqrt{n} \cdot \frac{1}{6} = n^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{6}$. In altre parole stiamo cercando di verificare se $\log(n) = O(n^{\frac{1}{2}})$, e ricadiamo così in un limite notevole, ossia il confronto tra logaritmi e polinomi.

Osservazione 3.2. Nelle considerazioni sui limiti che seguono, possiamo senza pregiudizio di generalità presupporre di avere a che fare con funzioni *sempre positive*. Dato che ci interessano solo le proprietà asintotiche delle funzioni, e che ci occupiamo soltanto di funzioni asintoticamente non negative, ciò equivale a considerare l'andamento delle funzioni asintoticamente positive dopo il punto di positività.

Definizione 3.3 (Limiti di Successioni)**.** Ricordiamo le definizioni di limiti nulli, infiniti, e finiti positivi per successioni numeriche.

$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ se e solo se $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[f(n) < \epsilon]$.
$\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ se e solo se $(\forall E > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[f(n) > E]$.
$\lim_{n\to\infty} f(n) = \ell > 0$ se e solo se $(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geq N)[\ell - \epsilon < f(n) < \ell + \epsilon]$.

Le classi di funzione che ci interesserà confrontare per il nostro studio degli algoritmi sono: polinomi, logaritmi, esponenziali, fattoriali. I limiti notevoli che ci interessano possono riassumersi così: per $b > 0$, $a > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Questo fornisce un quadro esauriente degli ordini di grandezza più importanti. Perché? Perché dire che $\frac{f(n)}{g(n)}$ tende a 0 significa dire che $g(n)$ cresce in modo *strettamente più veloce* di $f(n)$, e dire che $\frac{f(n)}{g(n)}$ tende a $+\infty$ significa dire che $g(n)$ cresce in modo *strettamente più lento* di $f(n)$.

Più precisamente, dimostriamo che valgono le seguenti relazioni tra i limiti di successioni e le notazioni asintotiche O, Ω, Θ.

(1) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ allora $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) \neq O(f(n))$.
(2) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ allora $f(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) \neq \Omega(f(n))$.
(3) Se $\lim_{n\to\infty} f(n) = \ell > 0$ allora $f(n) = \Theta(g(n))$.

Osservazione 3.4. Laddove $f(n) = O(g(n))$ non implica necessariamente che $g(n)$ è una limitazione superiore stretta per $f(n)$, dimostrare che il rapporto $f(n)/g(n)$ tende a 0 implica che $g(n)$ è strettamente più veloce di $f(n)$. Dualmente, $f(n) = \Omega(g(n))$ non implica necessariamente che $g(n)$ è una limitazione inferiore stretta per $f(n)$, dimostrare che il rapporto $f(n)/g(n)$ tende a $+\infty$ implica che $g(n)$ è strettamente più lenta di $f(n)$.

Diamo la dimostrazione del punto (2) qui sopra.

Proposizione 3.5 (Limite Superiore Stretto)**.** *Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$*, allora* $g(n) = O(f(n))$ *e* $f(n) \neq O(g(n))$*.*

Dimostrazione. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$. Dunque esiste N tale che per ogni $n \geq N$ vale $\frac{g(n)}{f(n)} \leq 1$. Dunque $g(n) \leq f(n)$, il che dimostra $g(n) = O(f(n))$.

Se fosse $f(n) = O(g(n))$, esisterebbero $c > 0$, N, tali che per ogni $n \geq N$, $f(n) \leq c \cdot g(n)$, i.e. $\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$. Ma $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ implica che, dato c, esiste N' tale che per ogni $n \geq N'$, $\frac{f(n)}{g(n)} > c$. Contraddizione. $\square$

Proposizione 3.6 (Limite Esatto)**.** *Se* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell$*, con* ℓ *reale positivo, allora* $f(n) = O(g(n))$ *e* $g(n) = O(f(n))$*, i.e.* $f(n) = \Theta(g(n))$*.*

Dimostrazione. Esercizio. Per il secondo punto usare il fatto che, se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell$, allora $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{\ell}$. $\square$

Con il metodo analitico molte dimostrazioni di limitazioni asintotiche si semplificano notevolmente.

Esempio 3.7. $\frac{n^2}{4n^2+5n+6} = \frac{1}{4+5/n+6/n^2}$ che tende a $1/4$ per $n \to \infty$. Dunque $4n^2 + 5n + 6 = \Theta(n^2)$.

Esempio 3.8. Anche la dimostrazione che ogni polinomio di grado d è in $\Theta(n^d)$ si semplifica notevolmente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{i=d} a_i \cdot n^i}{n^d} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_d \cdot n^d + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{n^d} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_d + \cdots + \frac{a_2}{n^{d-2}} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \frac{a_0}{n^d} \\
&= a_d
\end{aligned}$$

Dato che $a_d > 0$, deduciamo che $p(n) = \Theta(n^d)$, per la Proposizione 3.6.

Inoltre, si può dimostrare velocemente la seguente estensione del risultato.

Proposizione 3.9. *Se $p(n)$ è un polinomio di grado d allora*

(1) *Se $d < c$ allora $p(n)$ è strettamente più lento di n^c,*
(2) *Se $d > c$ allora $p(n)$ è strettamente più veloce di n^c.*

Dimostrazione. $\frac{p(n)}{n^c} = p(n) \cdot n^{-c} = p(n) \cdot n^{-d+d} \cdot n^{-c} = \frac{p(n)}{n^d} \cdot n^{d-c}$. Dunque $\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^c} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^d} \cdot n^{d-c} = a_d \cdot \lim_{n\to\infty} n^{c-d}$. Se $c > d$ allora $\lim_{n\to\infty} n^{c-d} = +\infty$. Se $c < d$ allora $\lim_{n\to\infty} n^{c-d} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d-c}} = 0$ $(d - c > 0)$. □

4. Logaritmi contro Polinomi

I logaritmi crescono più lentamente di qualsiasi polinomio. Questo confronto è lasciato per esercizio. Si dimostri che, per ogni $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^a} = 0.$$

Un approccio passo per passo al problema è il seguente.

Esercizio 4.1. Assumendo che $\log(n) \leq n$.

(1) Si dimostri che $\log(n) \leq \frac{n^t}{t}$ per ogni $n \geq 1$ per ogni $t \geq 1$.
(2) Si dimostri che $\frac{\log(n)}{n^a} \leq \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{n^{a/2}}$, per ogni $n \geq 1$.
(3) Si dimostri che per ogni $a > 0$, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $N > 0$ tale che per ogni $n \geq N$ $\frac{\log(n)}{n^a} \leq \epsilon$.

Osservazione 4.2. Si può analogamente dimostrare che ogni potenza di logaritmo cresce più lentamente di ogni funzione esponenziale con base positiva. I.e., che, per $a, b > 0$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)^b}{n^a} = 0.$$

5. Polinomi contro Esponenziali

Dimostriamo che ogni polinomio cresce più lentamente di ogni funzione esponenziale $n \mapsto a^n$ in base $a > 1$. Basta dimostrare che, per ogni $a > 1$, $b > 0$, vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^b} = +\infty.$$

Usiamo il cosidetto *Criterio del Rapporto*, ossia ricaviamo il limite per la successione $g(n) = \frac{a^n}{n^b}$ dal limite dei rapporti tra i suoi termini consecutivi, ossia da

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^b}}{\frac{a^n}{n^b}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}n^b}{(n+1)^b a^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^b \\
&= \lim_{n\to+\infty} a \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^b} \\
&= \lim_{n\to+\infty} a \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b} \\
&= a
\end{aligned}$$

Dal fatto che il limite dei rapporti è $a > 1$, possiamo dedurre che il limite della successione è $+\infty$, per il seguente Criterio del Rapporto.

Lemma 5.1 (Criterio del Rapporto, versione 1)**.** *Sia $g(n)$ una successione a termini positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \ell > 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} g(n) = +\infty$.*

Dimostrazione. Scegliamo a strettamente tra 1 e ℓ. Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = \ell$, esiste N tale che per ogni $n \geq N$ vale $\frac{g(n+1)}{g(n)} > a$. Dunque

$$(\forall n \geq N)[g(n+1) > a \cdot g(n)].$$

Dunque, per ogni $m > 0$,

$$g(N+m) > a \cdot g(N+m-1) > a \cdot a \cdot g(N+m-2) > \cdots > (a)^m \cdot g(N).$$

Ma $\lim_{n\to+\infty}(a)^m = +\infty$, perché $a > 1$. Perciò anche $\lim_{m\to+\infty} g(N+m) = +\infty$. □

6. Esponenziali contro Fattoriali

La funzione fattoriale cresce più velocemente di ogni funzione esponenziale. Possiamo dimostrare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

usando la seguente versione duale del Criterio del Rapporto:

Lemma 6.1 (Criterio del Rapporto, versione 2)**.** *Sia $g(n)$ una successione a termini positivi. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} g(n) = 0$.*

Dimostrazione. Scegliamo a strettamente tra 0 e 1. Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n+1)}{g(n)} = 0$, esiste N tale che per ogni $n \geq N$ vale $\frac{g(n+1)}{g(n)} < a$. Dunque

$$(\forall n \geq N)[g(n+1) < a \cdot g(n)].$$

Dunque, per ogni $m > 0$,

$$g(N+m) < a \cdot g(N+m-1) < a \cdot a \cdot g(N+m-2) < \cdots < a^m \cdot g(N).$$

Ma $\lim_{n\to+\infty} a^m = 0$, perché $0 < a < 1$, e perciò anche $\lim_{m\to+\infty} g(N+m) = 0$. □

Consideriamo ora la successione dei rapporti.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{g(n+1)}{g(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}n!}{(n+1)!a^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n+1}=0$$

Esempio 6.2. Dimostriamo che $n\cdot 64^{\log_4 n}=\Omega(n\cdot\sqrt{n})$, e che la limitazione è stretta (i.e., che non vale $n\cdot\sqrt{n}=\Omega(n\cdot 64^{\log_4 n})$). Per quanto visto, basta dimostrare il seguente limite.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 64^{\log_4 n}}{n\cdot\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(4^3)^{\log_4 n}}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n^3}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^{3/2}}=+\infty.$$

Esempio 6.3. Dimostriamo che $n\log\log n=\Omega(n^{1-\epsilon})$, per ogni $0<\epsilon<1$, e che la limitazione è stretta. Basta dimostrare quanto segue.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log\log n}{n^{1-\epsilon}}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1-\epsilon}}=n^{\epsilon}=+\infty.$$

Esercizio 6.4. Usando una versione opportuna del Criterio del Rapporto, dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

N.B. $n^n=2^{\log(n)n}$.

Esercizio 6.5. Esercizi da risolvere con metodo analitico e uso dei limiti notevoli. Indicare in ciascun caso se la limitazione (superiore o inferiore è stretta). $2^n+17n^4+3n^2=O(2^n)$, $(\sqrt{4})^{\log_4 n}=O(n^{7/3})$, $n\log\log n=O(n^{1+\epsilon})$ per ogni $\epsilon>0$, $n^3+9n^2+5n=O(n\log n)^2$, $n\log\log n=O(2^{n/2})$.

Esercizio 6.6. Confrontare l'andamento asintotico di funzioni esponenziali con basi diverse, i.e. a^n e b^n con $a,b>0$, $a\neq b$, per le diverse possibili scelte di a,b: $a>b>1$, $a<b<1$, $a<1<b$.

Osservazione 6.7. Per l'analisi asintotica non importa quale base si sceglie per i logaritmi! Perché? Perché i logaritmi nelle diverse basi sono tutte varianti moltiplicative della stessa funzione! Come ricordarsi la formula per il cambio di base? Ricavandola! Vogliamo esprimere il logaritmo in base a come funzione del logaritmo in base b. Basta ricordarsi che si ha sempre $n=t^{\log_t n}$, qualunque sia la base t. Quindi in particolare abbiamo $n=a^{\log_a n}$, $n=b^{\log_b n}$, e $a=b^{\log_b a}$. Dunque:

$$a^{\log_a n}=n=b^{\log_b n}=(a^{\log_a b})^{\log_b n}=a^{\log_a b\cdot\log_b n}.$$

Dunque $\log_a n=\log_a b\cdot\log_b n$, da cui la formula nota. E implica che $\log_a(n)=\Theta(\log_b n)$.