Es. 1. Si dimostri, utilizzando la definizione di *Θ, che*

$$f(n) = lg^2(2n) + lg\ 4n = \Theta(lg^2\ n)$$

mettendo in evidenza e commentando con chiarezza i passi seguiti.

Sol. Per dimostrare che f(n) è in $\Theta(lg^2\ n)$ dobbiamo trovare tre costanti positive c,c' e n' tali che $c\ lg^2\ n \le lg^2(2n) + lg\ 4n \le c'\ lg^2\ n$ per ogni $n \ge n'$. Trattiamo le due disuguaglianze separatamente.

1. $c\ lg^2\ n \le lg^2(2n) + lg\ 4n$ è banalmente vero per c = 1, perchè il logaritmo è crescente per ogni $n \ge 1$.

2. $lg^2(2n) + lg\ 4n \le c'\ lg^2\ n$
Poichè $(lg\ 2 + lg\ n)^2 + lg\ 4 + lg\ n =$
$1 + lg^2\ n + 2\ lg\ n + 2 + lg\ n =$
$lg^2\ n + 3\ lg\ n + 3$
la disuguaglianza diventa
$lg^2\ n + 3\ lg\ n + 3 \le c'\ lg^2\ n$ che è vera per $c' = 7$ e $n \ge 2$.
Concludiamo che l'affermazione è vera per c=1, c'=7 e n' = 2.

Es.2. Si imposti la relazione di ricorrenza che definisce il tempo di esecuzione della seguente funzione e la si risolva usando il metodo della sostituzione. Si commentino opportunamente i passaggi del calcolo, si disegni l'albero della ricorsione e come si giunge alla previsione sull'andamento del tempo di calcolo, si imposti l'induzione con chiarezza, sia nello scrivere quanto si vuole dimostrare sia nel formulare l'ipotesi induttiva.

```
Strano(A,i,j))
{ n = j-i+1
   if (n ≤ 1) return 1;
   m = n/2
   while n > 0 do n = n/2
   return Strano(A,i,i+m) +  Strano(A,i+m,j)
   }
```

La funzione è chiamata 2 volte su n/2 elementi e il ciclo while è eseguito in tempo logaritmico, quindi la relazione di ricorrenza è
$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(lg\ n)$.
Si deve quindi risolvere la ricorrenza
$T(n) = 2T(n/2) + c\ lg\ n$ se $n \ge 1$

T(n) = d altrimenti

L'albero della ricorsione per fare una previsione sull'andamento è qui abbozzato:

clg n

c lg n/2 c lg n/2

c lg n/2^2 c lg n/2^2 c lg n/2^2 c lg n/2^2

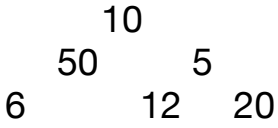
Ponendo n = 2^h, l'albero ha altezza h, ogni nodo ha 2 figli e al livello i ogni nodo è etichettato con c lg n/2^i Quindi, sommando su ogni livello si ha 2^i c lg n/2^i da cui:
$T(n) = 2^h d + \sum_{i=0...h-1} 2^i c \lg n/2^i$
$= 2^h d + \sum_{i=0...h-1} 2^i c \lg n/2^i = 2^h d + \sum_{i=0...h-1} 2^i c (\lg n - i) \leq 2^h d + \sum_{i=0...h-1} 2^i c \lg n = 2^h d + c \lg n (2^h - 1) = O(n\lg n)$
Infatti il termine nlgn è dominante rispetto a nd, quindi T(n) = O(nlgn).

Ora verifichiamo la previsione per induzione.
Faremo vedere che esistono due costanti positive k e n' tali che $T(n) \leq kn\lg n$, per ogni $n \geq n'$.
Sia vero per ipotesi induttiva per ogni $m < n$, consideriamo T(n):
$T(n) = 2T(n/2) + c \lg n \leq$
$2k (n/2) \lg n/2 + c \lg n =$
$2k (n/2) (\lg n - 1) + c \lg n =$
$kn\lg n - kn + c \lg n.$
Vediamo se troviamo due valori per k e n' tali che
$kn\lg n - kn + c \lg n \leq kn\lg n \Leftrightarrow - kn + c \lg n \leq 0 \Leftrightarrow c \lg n \leq kn$ quest'ultima disuguaglianza è vera per $k \geq c$ e per ogni $n \geq 1$

Considerando il caso base abbiamo che T(1) = d e T(2) = 4d+c e $T(2) \leq 4k$ è vero prendendo k = d+c.

Es. 3. Si progetti un algoritmo ricorsivo che verifica se un albero binario T ha una foglia di profondità k. Si descriva a parole l'idea algoritmica, si analizzi il tempo di esecuzione asintotico, specificando caso peggiore e caso migliore, e si produca lo pseudocodice.

Esempio: se k = 2 la risposta è 1 (vero), ci sono 3 foglie di profondità 2. Se k= 1 allora la risposta è 0 (falso) perché non ci sono foglie di profondità 1.



P.S. Soluzioni ridotte al solo pseudocodice non saranno corrette.

Sol. Modifichiamo la visita in preordine in modo da avere come parametro anche k oltre al nodo correntemente visitato e da controllare su ogni nodo se si tratta di una foglia della profondità voluta. Il parametro k deve essere decremento ad ogni discesa da padre a figlio, in modo che assumerà il valore 0 quando si trova la foglia di profondità k.
Si tratta di una variante della visita ma una volta trovata una foglia di profondità k la visita si ferma, quindi nel caso migliore si ha un tempo di esecuzione in Θ(h), quando la foglia è proprio sul cammino più a sinistra e nel caso peggiore è in Θ(n) quando la foglia cercata è invece sul cammino più a destra. In generale dunque l'algoritmo termina in O(n).

Pseudocodice:

```
DepthLeaf(T,k)
Input: T è un puntatore alla radica di un albero binario
Output: vero se in T è presente una foglia di profondità k
   if T == NULL then return 0
   if T è una foglia
                  if  k==0 return 1 else return 0
   return DepthLeaf(T.left,k-1)  or LeftmostLeaf(T.right,k-1)
```

Qui sfruttiamo l'implementazione dell'or logico, per cui se il primo dei due termini valuta a vero allora l'altro non è valutato.