Introduzione agli algoritmi
Proff. E. Fachini – S. Caminiti
5 maggio 2020

Es. 1: Un array ordinato, i cui elementi sono di indice da 1 a n, in ordine decrescente è sempre una Max-heap? Se la risposta è no si dia un contro esempio, se la risposta è sì la si dimostri utilizzando la definizione di Max-Heap.

Sol. Se l'array è ordinato in ordine decrescente vuol dire che per ogni i

$H[i] \geq H[i+1]$, per $i=1,\dots,n-1$, da cui anche $H[i] \geq H[j]$ se $i < j$, quindi come caso particolare si ha che $H[i/2] \geq H[i]$, per ogni $i = 1,\dots, n$ e questa è esattamente la proprietà di essere un max-heap.

Es. 2: Si dimostri che $\lg(n^2 + 1) = \Theta(\lg n)$.

Sol.

Si tratta di dimostrare che esistono tre costanti positive c,c' e n' tali che

$c \lg n \leq \lg (n^2 + 1) \leq c' \lg n$ per ogni $n \geq n'$.

Consideriamo la prima disuguaglianza.

$\lg (n^2 + 1) \geq c\lg n$

Visto che la funzione logaritmo è crescente possiamo affermare che

$\lg (n^2 + 1) \geq \lg n^2 = 2 \lg n$, si può quindi prendere $c = 2$ e $n \geq 1$ per rendere vera la prima disuguaglianza.

Consideriamo la seconda disuguaglianza.

$\lg (n^2 + 1) \leq c' \lg n$

Sempre sfruttando la proprietà di essere crescente della funzione logaritmo

$\lg (n^2 + 1) \leq \lg 2n^2$ per $n \geq 1$

$\lg 2n^2 = \lg 2 + 2\lg n = 1 + 2 \lg n \leq 3 \lg n$ per $n \geq 2$

si può quindi prendere $c' = 3$ e $n \geq 2$ per rendere vera la seconda disuguaglianza.

In conclusione l'affermazione è vera per $c = 2$, $c'=3$ e $n'= 2$.