

INTRODUZIONE AGLI ALGORITMI

Seconda prova di Esonero

30 Maggio 2019

Prof.ssa Calamoneri - Prof.ssa Fachini - Prof.ssa Petreschi

Esercizio 1.

Dato un albero binario di ricerca T , sia a la chiave di un suo nodo x . Si risponda alle seguenti domande dimostrando le risposte:

1. E' vero che se x ha due figli, allora il nodo contenente il successivo di a non ha figlio sinistro?
2. E' vero che se x è un nodo foglia e il padre di x ha chiave di valore b , allora o b o è il successivo di a o è il precedente di a ?
3. Si considerino due operazioni successive su T . La prima inserisce un nodo y di chiave k e la seconda elimina lo stesso nodo y . L'albero risultante è uguale a T ?
4. Si supponga che T sia un albero AVL e su questo si eseguano le operazioni descritte al punto 3. Che tipo di risposta avremo?

Sol.

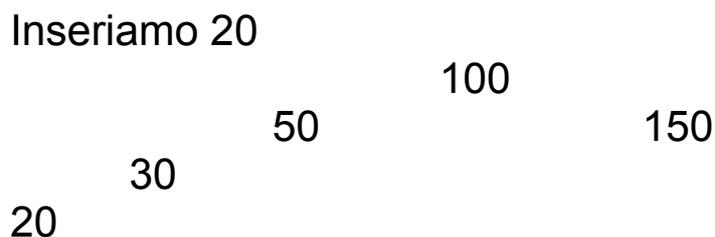
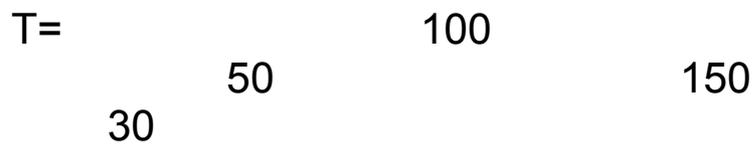
Risposta 1. E' vero perchè il suo successivo è il minimo nel sottoalbero destro e in quanto tale non può avere un figlio sinistro, la cui chiave dovrebbe essere minore.

Risposta 2. E' vero perchè se x è una foglia non ha figli e quindi il suo successivo e il suo precedente va ricercato tra i suoi antenati. Se x è un figlio sinistro, suo padre è il primo nodo risalendo da x che lo ha nel sottoalbero sinistro quindi è il suo successivo. Se z di chiave c fosse il padre di b , e y fosse figlio sinistro di z si avrebbe che $a < b < c$, se invece y fosse figlio destro di z allora $c < a < b$

Se invece x è figlio destro allora suo padre è il primo nodo incontrato risalendo da x che lo ha nel sottoalbero destro e quindi il padre è il suo precedente.

Risposta 3. E' vero, infatti un nuovo nodo in un ABR è sempre inserito come foglia, quindi la sua cancellazione ripristina l'albero che si aveva prima dell'inserimento.

Risposta 4. In generale non è detto che l'albero sia lo stesso, se infatti si esegue una rotazione allora la cancellazione del nodo può lasciare un albero diverso da quello di partenza. Per esempio:



L'albero è sbilanciato e il nodo con $FB = 2$ è il nodo di chiave 50, con una rotazione a destra su 50 si ribilancia l'albero, siamo infatti in un caso left-left, visto che il nodo 30 ha $FB = 1$. Dopo la rotazione si ha



Se ora si cancella 20 si ottiene



e questo albero è diverso da T.

Esercizio 2.

Dato un vettore A di n elementi (con n potenza di 4), considerare la variante dell' algoritmo di Merge Sort che ordina il vettore A dividendolo ad ogni passo in 4 sottovettori invece che in due.

Supponendo di avere una funzione $Fondi(A, ind_1, ind_2, ind_3, ind_4, ind_5)$ che fonde in un unico sottovettore ordinato dall'indice ind_1 all'indice ind_5 i 4 sottovettori ordinati che vanno dall'indice ind_i all'indice ind_{i+1} , $i=1, \dots, 4$, si scriva (giustificandola) l'equazione di ricorrenza che ne esprime il costo computazionale e la si risolva utilizzando il metodo di sostituzione.

Sol.

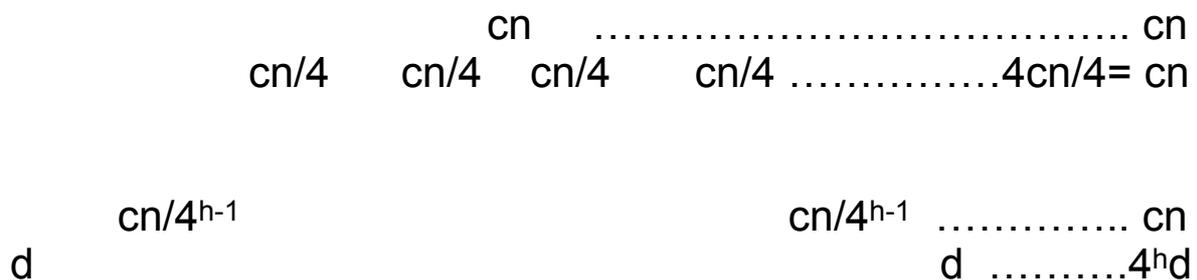
La relazione di ricorrenza è $T(n) = 4T(n/4) + \Theta(n)$, visto che si hanno 4 chiamate della funzione mergeSort su $n/4$ elementi e la fondi lavora in tempo lineare.

Per risolverla esplicitiamo le costanti e fissiamo il costo del caso base:

$$T(n) = 4T(n/4) + cn \text{ se } n \geq 2$$

$$T(n) = d \text{ altrimenti}$$

Sia $n = 4^h$, l'albero della ricorrenza è



Quindi il costo su ogni livello è cn , possiamo quindi concludere che $T(n) = 4^h d + \sum_{i=0, \dots, h-1} cn = O(n \lg n)$

Prova induttiva che $T(n) = O(n \lg n)$

Dimostriamo che esistono k ed n_0 tali che $T(n) \leq k n \log_4 n$.

Supponiamo che la tesi sia vera per ogni $m < n$ e consideriamo

$$T(n) = 4T(n/4) + cn \leq 4 kn/4 \log_4 n/4 + cn = nk \log_4 n - kn + cn$$

Controlliamo se $kn \log_4 n - kn + cn \leq kn \log_4 n$ cioè se esiste un valore di k per cui $-kn + cn \leq 0$. Tale valore esiste ed è per esempio $k = c$.

Andando a vedere il caso base

$$T(1) = d \text{ che non è maggiorato da } \log_4 1 \text{ che è } 0.$$

Prendiamo allora $T(4) = 4T(1) + 4c = 4(d+c)$ e vediamo per

quale valore di k si ha $4(d+c) \leq 4k \log_4 4 = 4k$. Basta prendere $k = d+c$ e $n_0 = 4$. Si può quindi concludere che $T(n) = O(\text{nlg } n)$. Il limite inferiore che si ricava dalla definizione è lineare, ma si può dimostrare in modo analogo che vale anche $T(n) = \Omega(n \lg n)$.

Esercizio 3.

Si consideri un albero binario qualunque, memorizzato tramite strutture e puntatori e dato tramite il puntatore T alla sua radice.

Le strutture che rappresentano i nodi dell'albero sono dotate di un campo aggiuntivo bil , che è inizializzato a 0, e che dovrebbe contenere per ogni nodo la differenza tra l'altezza del sottoalbero sinistro e l'altezza del sottoalbero destro.

Si progetti un algoritmo che scriva il corretto valore di bil in ogni nodo dell'albero, se ne scriva lo pseudocodice e se ne calcoli il tempo di esecuzione asintotico.

Sol.

E' una modifica dell'algoritmo per calcolare l'altezza di un albero binario. Si tratta di calcolare l'altezza del sotto albero radicato in ogni nodo e poi aggiornare di conseguenza il campo bil . Se infatti il sottoalbero sinistro ha altezza h_1 e quello destro h_2 allora il nodo padre avrà un campo bil pari a $h_1 - h_2$.

Si tratta di una visita in post order quindi il tempo di esecuzione asintotico è $O(n)$.

Pseudocodice:

FattoriBil(T)

Input: T è il puntatore alla radice di un albero binario

Output l'altezza dell'albero e la modifica del campo bil di ogni nodo con la differenza tra l'altezza del sottoalbero sinistro e l'altezza del sottoalbero destro

if T = NULL the return -1

```
h1 = FattoriBil(T.left)
h2 = FattoriBil(T.right)
T.bil = h1- h2
return max(h1.h2) +1
```