

Ricerca di un elemento in una matrice

Sia data una matrice $n \times m$, in cui gli elementi di ogni riga e di ogni colonna sono ordinati in ordine crescente. Si vuole un algoritmo che determini se un elemento x è presente nella matrice in $O(n+m)$.

Esempio.

Sia $x = 94$ e la matrice 5×4 :

	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

In $A[1,1]$ si ha il minimo, visto che nella prima colonna c'è il minimo di ogni riga e nella prima riga il minimo di ogni colonna.

Nell'esempio $A[1,1] = 5$

In $A[n,m]$ c'è invece il massimo, visto che nell'ultima colonna c'è il massimo di ogni riga e nell'ultima riga il massimo di ogni colonna.

Nell'esempio $A[5,4] = 98$

Quali confronti 1

Bisogna che ogni confronto consenta di trascurare nei prossimi confronti un'intera riga o un'intera colonna.

Se si confronta l'elemento cercato con il primo della prima riga, si possono eliminare gli elementi di una riga o di una colonna?

Esempio.

Sia $x = 41$ e la matrice 5X4:

	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

Poiché $A[1,1]$ è il minimo, abbiamo che se l'elemento è maggiore non possiamo escludere alcun elemento, oltre al minimo stesso, se invece l'elemento cercato è minore del minimo, possiamo concludere che non presente.

Nell'esempio se $x = 41$, poiché $41 > 5$, escludiamo solo 5; se $x = 2$, allora $x < 5$ allora l'elemento non è presente e si può uscire dalla procedura di ricerca. Quindi il confronto con il primo elemento non è la scelta giusta!

Quali confronti 2

Analogamente il confronto con l'ultimo elemento dell'ultima riga non consente di eliminare una riga o una colonna.

Se confronto l'elemento cercato con l'ultimo della prima riga, posso eliminare gli elementi di una riga o di una colonna?

Esempio. La matrice 5X4:
se $x = 41$

	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

Poiché $A[1,n]$ è il massimo sulla prima riga, se l'elemento cercato è maggiore di $A[1,n]$ si possono escludere tutti gli elementi della prima riga.

Nell'esempio $x = 41 > 15$, quindi si possono escludere tutti gli elementi della prima riga, visto che sono minori di 15 e quindi minori di 41.

Quali confronti 3

Se confronto l'elemento cercato con l'ultimo della prima riga, posso eliminare gli elementi di una riga o di una colonna?

Esempio. La matrice 5X4:
se $x = 7$

	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

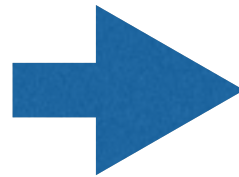
Poiché $A[1,n]$ è il minimo dell'ultima colonna, se l'elemento cercato è minore di $A[1,n]$ si possono escludere tutti gli elementi dell'ultima colonna.

Nell'esempio $x = 7$, si possono escludere tutti gli elementi della colonna visto che sono maggiori di 15 e quindi di 7.

Continuiamo l'esempio con $x = 41$

	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

Si cerca $x = 41$
poiché $41 > 15$ e si elimina
la prima riga:



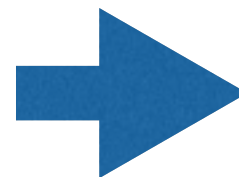
	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

$x = 41 > 21$ e si
elimina la riga:



	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

$x = 41 < 45$ e si elimina la
colonna:

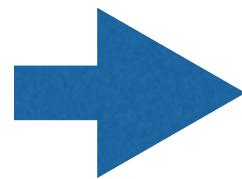


	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

esempio confronto finali

	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

$x = 41 < 42$, si eliminano
gli elementi della colonna



	1	2	3	4
1	5	8	12	15
2	11	17	20	21
3	40	41	42	45
4	80	88	90	91
5	92	94	97	98

Ora il confronto è con 41, poiché $x = 41$ si esce perché trovato

Ricerca in matrice

INPUT: una matrice A $n \times m$ e l'elemento da cercare in A , x .

PREC: gli elementi di ogni riga e ogni colonna di A sono ordinati in ordine crescente

OUTPUT: la posizione di x se occorre, -1 altrimenti.

RicMatrice(A,x)

finché c'è una riga o una colonna da esaminare

se x è uguale all'elemento, a , nell'angolo superiore destro della matrice, esci restituendo gli indici di questa entrata
se x è minore di a allora prepara il confronto di x con l'elemento nella stessa riga e nella colonna precedente
altrimenti con l'elemento nella colonna di a e nella riga successiva

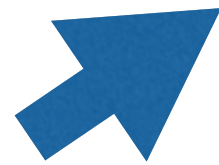
se non trovato return -1

In generale all'inizio

si elimina la colonna, cioè si passa al confronto con $A[1, m-1] = k'$

	1	2	...	m
1				k
2				
...				
n				

$x < k$



x viene confrontato con $A[1, m] = k$

	1	2	...	m-1	m
1				k'	k
2					
...					
n					



$x > k$

si elimina la riga, cioè si passa al confronto con $A[2, m] = k''$

	1	2	...	m
1				k
2				k''
...				
n				

Se $x = A[1, m]$ allora si esce.

Caso intermedio

	1	2	...	j	...	m
1						
2						
...						
i				k		
...						
n						

$x < k$



x si confronta con $A[i,j] = k$



$x > k$

Gli elementi nelle righe precedenti l'i-sima e nelle colonne successive alla j-sima sono già stati eliminati dai confronti precedenti.

	1	2	...	j-1	j	...	m
1							
2							
...							
i				k'	k		
...							
n							

elimina la colonna, cioè confronta con $k' = A[i,j-1]$

	1	2	...	j	...	m
1						
2						
...						
i				k		
i+1				k''		
...						
n						

elimina la riga, cioè confronta con $k'' = A[i+1,j]$

Ricerca in matrice

INPUT: una matrice A $n \times m$ e l'elemento da cercare in A , x .

PREC: gli elementi di ogni riga e ogni colonna di A sono ordinati in ordine crescente

OUTPUT: la posizione di x se occorre, -1 altrimenti.

RicMatrice(A, x)

sia n il numero delle righe di A

sia m il numero delle colonne di A

if $n = 0$ o $m = 0$ then return -1

if $x < A[1,1]$ or $x > A[n,m]$ then return -1

$i=1$; $j=m$

while $i \leq n$ and $j \geq 1$ do

if ($x == A[i,j]$) then return (i,j)

if ($x < A[i,j]$) then $j = j - 1$ else $i = i + 1$

if $i > n$ or $j < 1$ then return -1

Ricerca in matrice: complessità

RicMatrice(A,x)

sia n il numero delle righe di A

sia m il numero delle colonne di A

if n = 0 o m = 0 then return -1

if x < A[1,1] or x > A[n,m] then return -1

i=1

j=m

while i ≤ n and j ≥ 1 do

if (x = A[i,j]) then return (i,j)

if (x < A[i,j]) then j= j-1 else i=i+1

then return -1

$\Theta(1)$

$T(n,m) = \Theta(n+m)$, nel caso peggiore.