In questa lezione

– Esempi di relazioni di ricorrenza

- [CLRS] cap 4, par. 4.1 e 4.2

Esempio albero e sviluppo

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 2F(n/2) + c & \text{se } n>0 \end{cases}$$

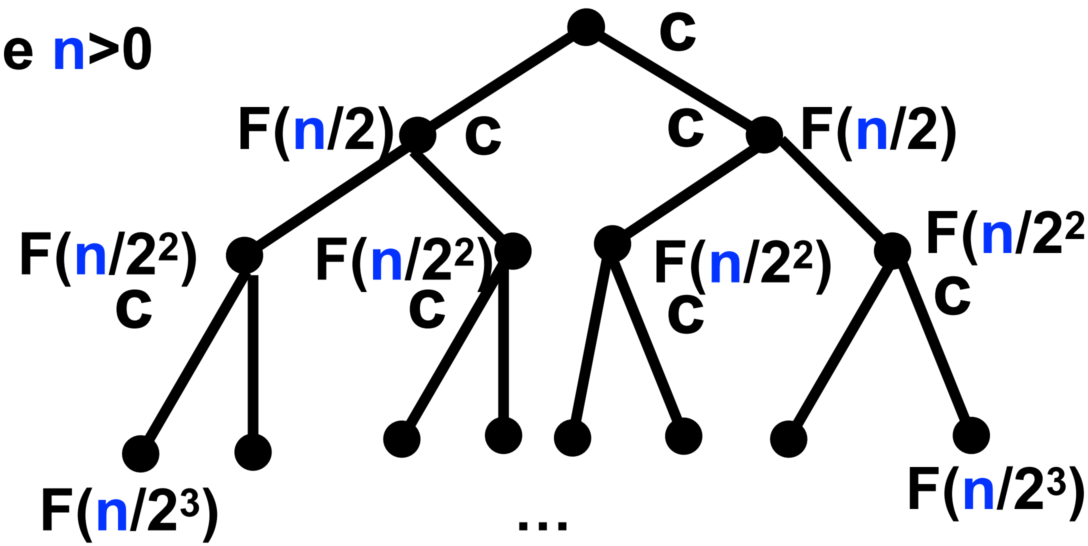
$$F(n) = 2F(n/2) + c$$

$$= 2\underbrace{(2F(n/2^2) + c)}\ + c$$

$$= 2^2F(n/2^2) + 2c + c$$

$$= 2^2\underbrace{(2F(n/2^3) + c)} + 2c + c$$

$$= 2^3F(n/2^3) + 2^2c + 2c + c$$



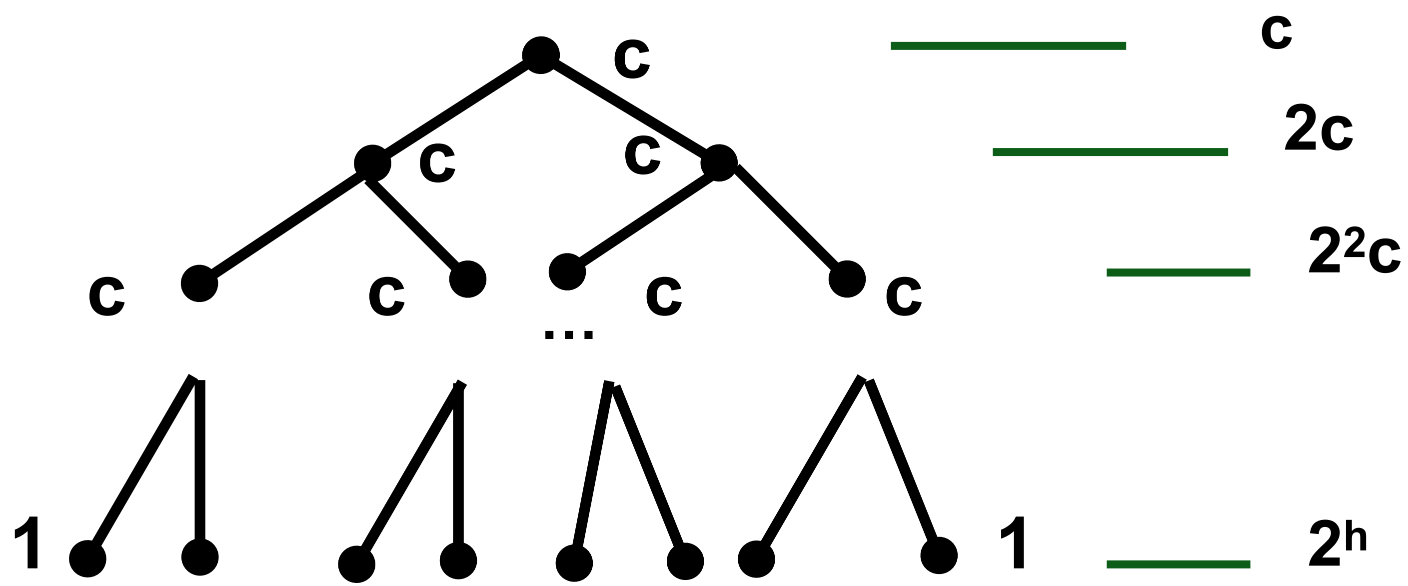
Se $n=2^h$ si ha

$F(n) = 2^h F(1) + 2^{h-1}c + 2^{h-2}c \ldots + 2c + c = n + c(2^h -1) =$

$n + c(n -1)$. Quindi supponiamo che $F(n) = \Theta(n)$

Uso dell'albero

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 2F(n/2) + c & \text{se } n>0 \end{cases}$$



L'albero ha altezza h e l'ultimo livello ha 2^h foglie di "costo" 1.

Ogni livello i ha "costo" totale $2^i c$ quindi

$$F(n) = 2^h 1 + 2^{h-1}c + \ldots + 2c + c = n + c(2^h - 1) = n + c(n-1).$$

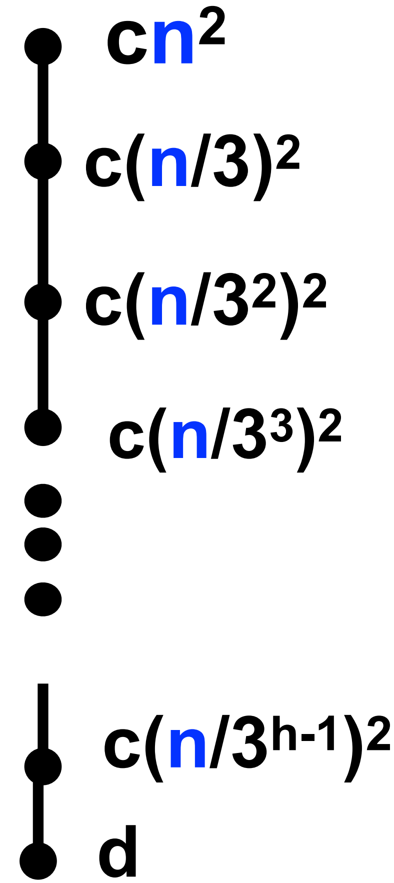
Esempio 2

La ricorrenza
$T(n) = d$ per $n \leq 1$
$T(n) = T(n/3) + \Theta(n^2)$ altrimenti

viene riscritta:
$T(n) = d$ per $n \leq 1$
$T(n) = T(n/3) + cn^2$

Esempio 2

$T(n) = d$ per $n \leq 1$
$T(n) = T(n/3) + cn^2$



$$T(n) = T(n/3) + cn^2$$
$$= T(n/3^2) + c(n/3)^2 + cn^2$$
$$= T(n/3^3) + c(n/3^2)^2 + c(n/3)^2 + cn^2$$
$$\ldots$$

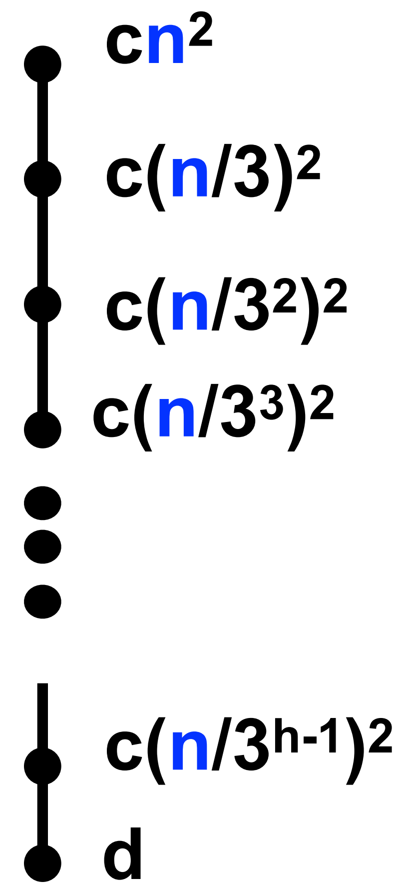
$n/3^h = 1 \Leftrightarrow n = 3^h \Leftrightarrow h = \log_3 n$

Fase 1 - i conteggi

$T(n) = d$ per $n \leq 1$
$T(n) = T(n/3) + cn^2$

$T(n) =$
$cn^2 + (1/3)^2 cn^2 + (1/3^2)^2 cn^2 + (1/3^3)^2 cn^2$
$\ldots + (1/3^{h-1})^2 cn^2 + d =$

$cn^2 [((1/3)^2)^0 + (1/3)^2 + (1/3^2)^2 + (1/3^2)^3 \ldots$
$+ (1/3^2)^{h-1}] + d =$



$O(n^2)$ perché la serie potenze di base 1/9, che è minore di 1, converge a una costante. Poichè la serie maggiora la somma parziale da 0 a h-1, otteniamo il risultato

Verifica induttiva

$T(n) = d$ per $n \leq 1$
$T(n) = T(n/3) + cn^2$

1. Vogliamo far vedere che $T(n) = O(n^2)$ cioè che esistono due costanti $k, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq kn^2$, per ogni $n \geq n_0$

Passo induttivo:

Supponiamo che sia vero per ogni $m<n$ e consideriamo $T(n)$

$T(n) = T(n/3) + cn^2$ per l'ipotesi induttiva

$T(n/3) \leq k(n/3)^2$ quindi

$T(n) \leq k(n/3)^2 + cn^2$

Bisogna controllare se è vero che $k(n/3)^2 + cn^2 \leq kn^2$

$\Leftrightarrow$ $k(1/9)n^2 + cn^2 \leq kn^2$ se $n \geq 1$, possiamo dividere per n^2

$\Leftrightarrow$ $1/9k + c \leq k$

$\Leftrightarrow$ $k + 9c \leq 9k$

$\Leftrightarrow$ $9c \leq 8k$ quindi basta prendere per esempio $k = 9c$,

e $n_0 = 1$.

Verifica di T(1) e limite inferiore

$T(n) = d$ per $n \leq 1$
$T(n) = T(n/3) + cn^2$

Abbiamo trovato che
$T(n) \leq kn^2$ per $k = 9c$ e ogni $n \geq 1$,

ma $T(1) = d$
Allora prendiamo $k = 9(c+d)$, così possiamo lasciare $n_0 = 1$.

Poiché il termine cn^2 fornisce un limite inferiore alla crescita della funzione T, possiamo concludere che $T(n) = \theta(n^2)$

Ricerca binaria: versione ricorsiva

INPUT: un array A di n numeri con indice iniziale 1, e l'elemento da cercare, *x*.

Precondizione: gli elementi in A sono ordinati in ordine crescente

OUTPUT: la posizione di *x* se occorre nella sequenza, 0 altrimenti.

```
RicBinariaRic(A,low,high,x)
if (low > high) then return 0
 mid ←(high + low +1)/2
 if x = A[mid] then  return mid
else if (x < A[mid])
        then return RicBinariaRic(A, low, mid-1,x)
           /*x può essere nella metà sinistra*/
        else return RicBinariaRic(A, mid+1, high,x)
             /*x può essere nella metà destra*/
```

$\Theta(1)$ (prime quattro righe)

$T(n/2)$ (chiamata sulla metà sinistra)

$T(n/2)$ (chiamata sulla metà destra)

L'intervallo di ricerca è sempre tra A[low] e A[high] compreso

La ricorrenza

$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$

Esplicitiamo le costanti:

$T(n) = T(n/2) + c$ se $n \geq 1$

$T(1) = d$ altrimenti

Dimostriamo che $T(n) = O(\lg n)$,
cioè che esistono due costanti $k, n_0 \geq 0$
tali che $T(n) \leq k \lg n$, per ogni $n \geq n_0$

$O(\lg n)$ per Ricerca Binaria

Passo induttivo: supponiamo che $T(m) \leq k \lg m$ per ogni $m < n$ e consideriamo $T(n)$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T(n/2) + c \\
&\leq k \lg n/2 + c \\
&\leq k \lg n - k + c \\
&\leq k \lg n \text{ per ogni } k \geq c \text{ e } n \geq 2,
\end{aligned}
$$

perché per $n = 1$ $\lg n = 0$

Controlliamo il caso base $T(1) = d$. Per definizione $T(2) = T(1) + c = d + c$.
Prendendo $k = d+c$, possiamo dire che $T(2) \leq k \lg 2 = c+d$.
Quindi concludiamo che $T(n) \leq k \lg n$ pr ogni $n \geq 2$.

Semplificare la ricorrenza nell'analisi

Poiché il caso base, nel contesto dell'analisi degli algoritmi, è sempre una costante, possiamo ometterlo.

Per esempio per descrivere la complessità del mergesort con una ricorrenza possiamo scrivere

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

invece di
$T(n) = \Theta(1)$ se $n \leq 1$
$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$ altrimenti

Esempio 3

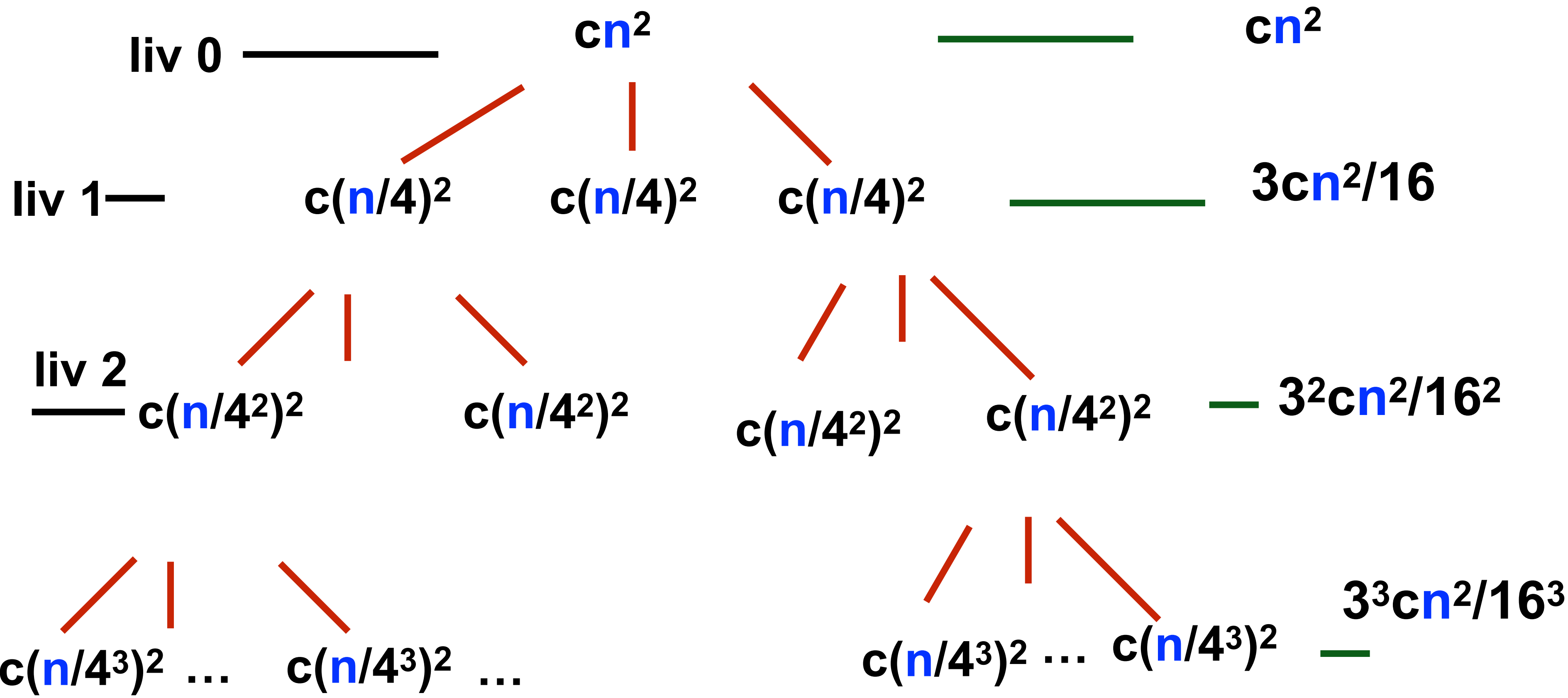
La ricorrenza

$$T(n) = 3T(n/4) + \Theta(n^2)$$

Albero di ricorsione

$T(n) = c$ se $n \leq 1$
$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

Sia $n = 4^h$

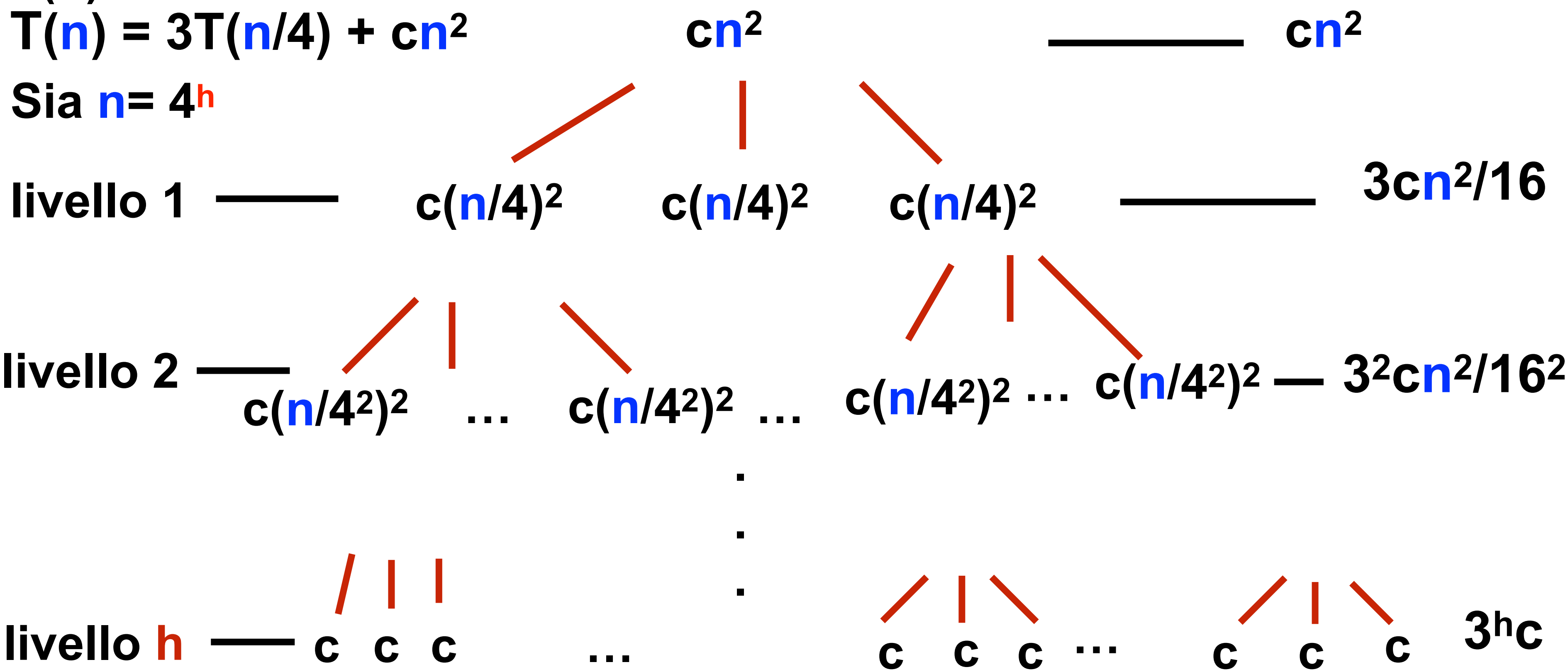


Albero di ricorsione

$T(n) = c$ se $n \leq 1$

$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

Sia $n = 4^h$



$h = \log_4 n$, con un cambio di base $\lg_4 n = \log_3 n \log_4 3$

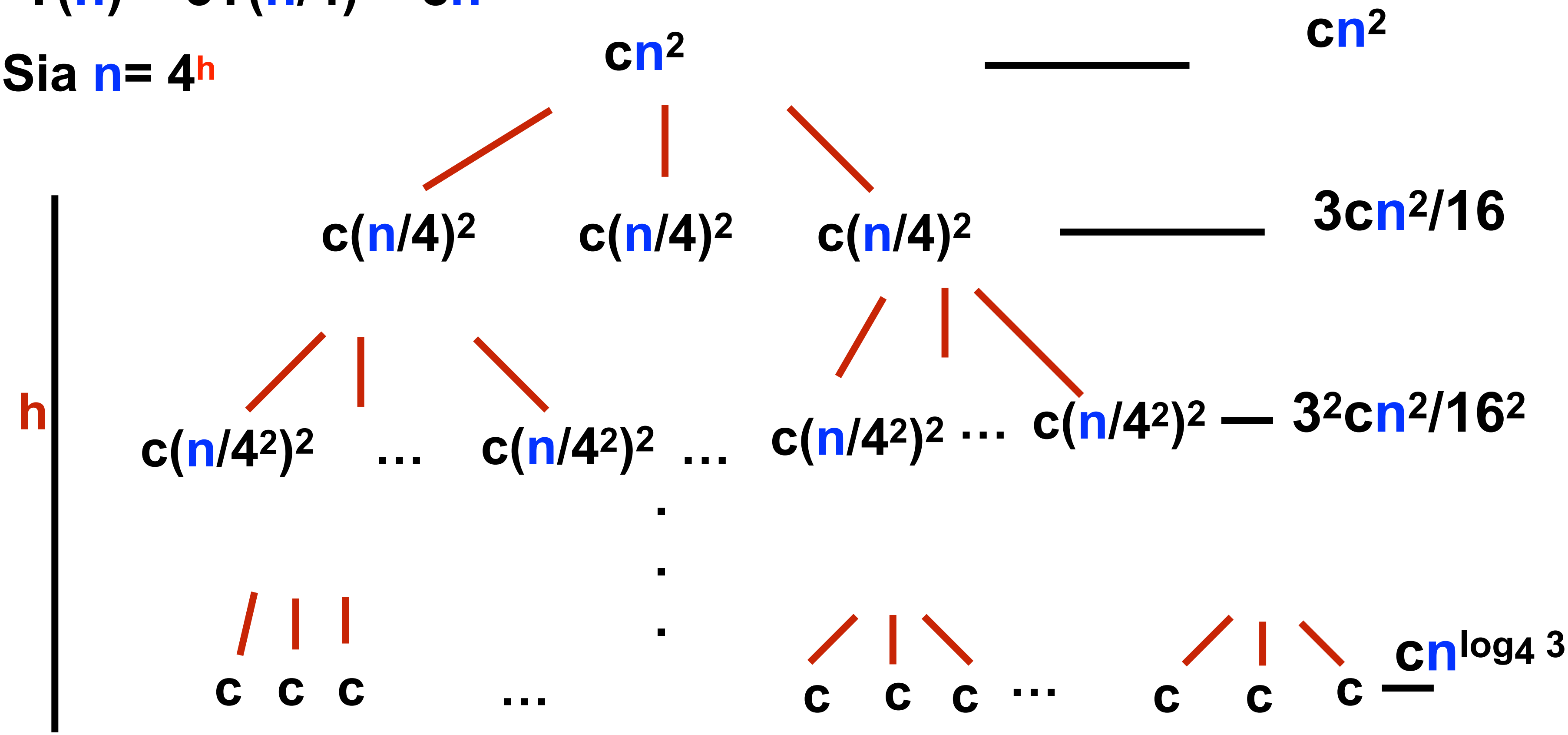
$3^h c = 3^{\log_3 n \log_4 3} c = n^{\log_4 3} c$

Albero di ricorsione

$T(n) = c$ se $n \leq 1$

$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

Sia $n = 4^h$



$$T(n)=(3/16)^0cn^2+(3/16)cn^2+(3/16)^2cn^2+\ldots+(3/16)^{h-1}cn^2 + cn^{\log_4 3}$$

Conteggi

$T(n)=$

$(3/16)^0cn^2 + (3/16)cn^2 + (3/16)^2cn^2 + \ldots + (3/16)^{h-1}cn^2 + cn^{\log_4 3}$

$= cn^2[(3/16)^0 + (3/16) + (3/16)^2 + \ldots + (3/16)^{h-1}] + cn^{\log_4 3}$

Poiché 3/16 <1, se maggioriamo la somma di potenze finita con la somma estesa all'infinito, possiamo sfruttare il fatto che questa serie converge a una costante

$\sum_{i\geq 0}(3/16)^i = \Theta(1)$

Potremmo concludere che $T(n) = O(n^2)$, visto che $\log_4 3 < 2$

Siamo sicuri di questo risultato?

Fase 2: verifica

$T(n) = 3T(n/4) + \Theta(n^2)$

1. Vogliamo far vedere che $T(n) = O(n^2)$ cioè che esistono k ed n_0 tali che $T(n) \leq kn^2$, per ogni $n \geq n_0$.

Usiamo l'induzione.

Passo induttivo:

Supponiamo che sia vero per ogni m<n e consideriamo $T(n)$

$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$ poiché per ip. induttiva $T(n/4) \leq k(n/4)^2$

$3T(n/4) + cn^2 \leq 3k(n/4)^2 + cn^2 = (3/16)kn^2 + cn^2$

Bisogna controllare se è vero che $(3/16)kn^2 + cn^2 \leq kn^2$

$\Leftrightarrow 3/16k + c \leq k$

$\Leftrightarrow 3k + 16c \leq 16k$

$\Leftrightarrow 16c \leq 13k$

$\Leftrightarrow 16/13c \leq k$

Vero se si prende $k = 2c$ e $n_0 = 1$

verifica: passo base

$T(n) = c$ se $n \leq 1$
$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

Abbiamo ottenuto $T(n) \leq kn^2$, per $k = 2c$ e per ogni $n \geq 1$.

Poiché $T(1) = c$, e $c \leq 2c$ si può anche mantenere $k = 2c$ e $n_0 = 1$.

Conclusione

$T(n) = c$ se $n \leq 1$
$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$

Abbiamo provato che $T(n) = O(n^2)$.
Osserviamo che il termine additivo è in $\Theta(n^2)$, che fornisce un limite inferiore alla soluzione per $T(n)$.

Quindi possiamo dire che $T(n) = \Omega(n^2)$ e in definitiva che $T(n) = \Theta(n^2)$

Divide et impera: analisi

Dato un problema di dimensione (taglia) n

- **Dividi:** dividi il problema in a sottoproblemi ciascuno di taglia n/b — $D(n)$
- **Conquista:** risolvi ricorsivamente i sottoproblemi, — $aT(n/b)$
  - quando il sottoproblema è di taglia minore o uguale a c risolvilo direttamente — $\Theta(1)$
- **Combina:** usa le soluzioni dei sottoproblemi per determinare la soluzione del problema dato — $C(n)$

$$
\boxed{\begin{array}{l} T(n) = \Theta(1) \quad \text{se } n \leq c \\ T(n) = aT(n/b) + D(n) + C(n) \text{ se } n > c \end{array}}
$$

Le ricorrenze da analisi di programmi ricorsivi

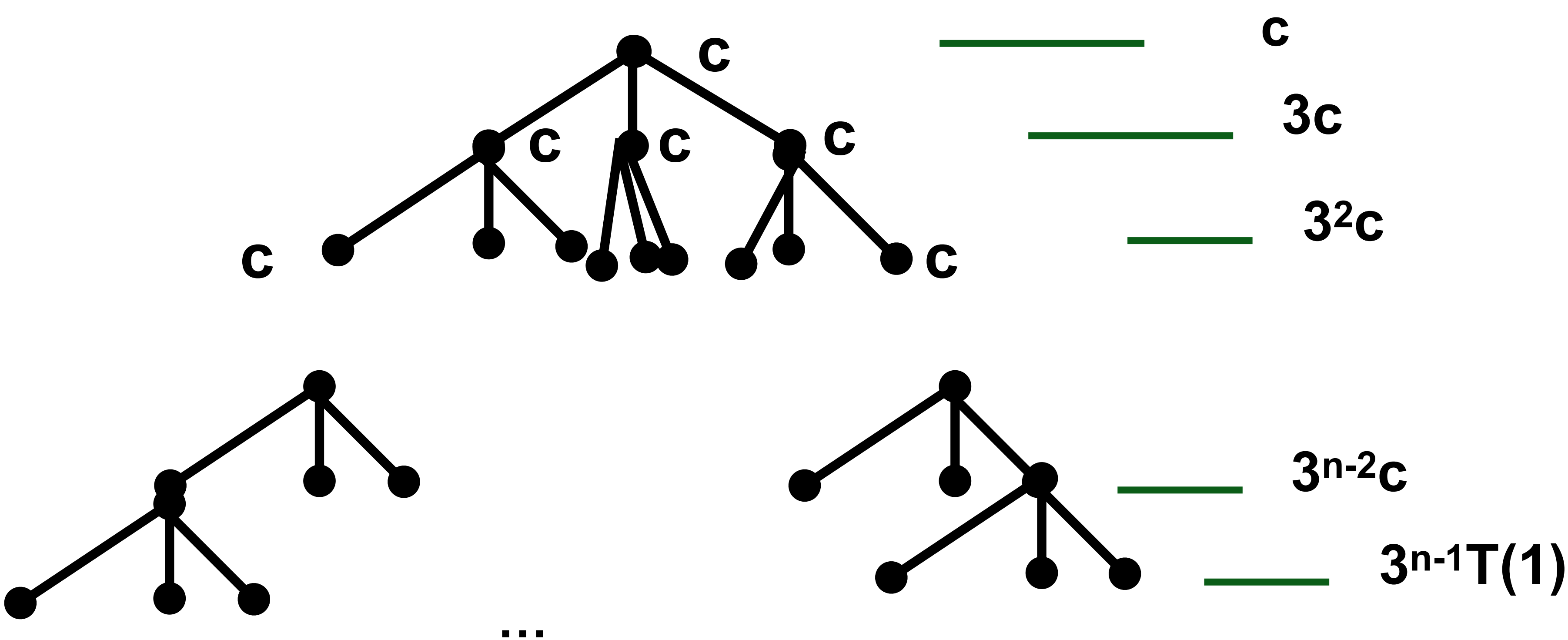
Si valuti la complessità del seguente algoritmo ricorsivo,

```
test(n)
  if n ≤ 1 then return
  for i ← 1 to 3 do
  test(n-1)
```

$$T(n) = 3T(n-1) + \Theta(1)$$

Soluzione

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T(n-1) + c & \text{se } n > 1 \end{cases}$$



$$T(n) = 3^{n-1}T(1) + c \sum_{i=0,\dots,n-2} 3^i$$

$$= 3^{n-1}T(1) + \Theta(3^{n-1}) = \Theta(3^n)$$

Verifica induttiva

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T(n-1) + c & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

1. Vogliamo far vedere che $T(n) = O(3^n)$ cioè che esistono due costanti $k, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq k3^n$, per ogni $n \geq n_0$

Passo induttivo:

Supponiamo che sia vero per ogni $m<n$ e consideriamo $T(n)$

$T(n) = 3T(n-1) + c$ per l'ipotesi induttiva

$T(n-1) \leq k3^{n-1}$ quindi

$T(n) \leq 3k3^{n-1} + c$

Bisogna controllare se è vero che $k3^n + c \leq k3^n$ falso!

Ma il risultato è giusto, è solo un termine costante additivo che non fa tornare i conti. Facciamo vedere che esistono due costanti $k, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq k3^n - c$ per ogni $n \geq n_0$.

Verifica induttiva modificata

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T(n-1) + c & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Facciamo vedere che esistono due **costanti k, $n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq k3^n - c$ per ogni $n \geq n_0$.**

Passo induttivo:

Supponiamo che sia vero per ogni $m<n$ e consideriamo $T(n)$
$T(n) = 3T(n-1) + c$ per l'ipotesi induttiva
$T(n-1) \leq k3^{n-1} - c$ quindi
$T(n) \leq 3(k3^{n-1} - c) + c = k3^n - 3c + c = k3^n - 2c$
Bisogna controllare se è vero che $k3^n - 2c \leq k3^n - c$
Vero per ogni scelta di k.
Quindi esistono due costanti k, $n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq k3^n - c$ per ogni $n \geq n_0$.
Trascuriamo il caso base.

Strange(A,i,j)
input A è un array e i e j due interi
prec. $1 \leq i,j \leq A.length$
if $i < j$ then

   m = (i+j)/2
   m1 = (i+m)/2   \\ m1 individua il punto medio nella prima parte
   m2 = (m+j)/2   \\ m2 quello della seconda
   Strange(A,m1,m2)
   Strange (A,i,m)
   Strange(A,m+1,j)
   Final(A,i,j)

Final ha tempo di esecuzione $\Theta(n^2)$, dove n è il numero degli elementi di A su cui è chiamata:

$$T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n^2)$$

Soluzione

Sia $n = 2^h$

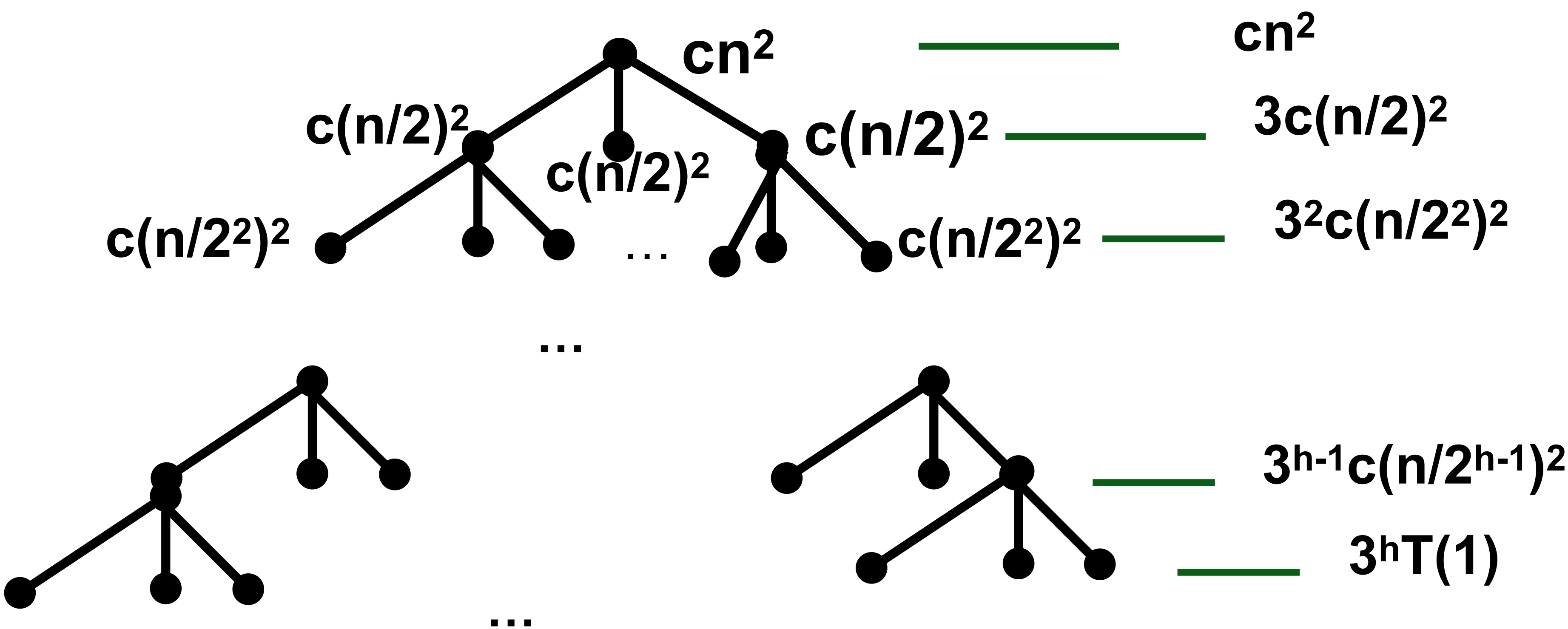
$3^h = ?$

$h = \lg n$, quindi

$3^{\lg n} = 3^{\log_3 n \lg 3}$

$= n^{\lg 3} \leq n^2$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T(n/2) + cn^2 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$



$$T(n) = 3^h T(1) + c\, n^2 \sum_{i=0,\ldots,h-1} (3/2^2)^i = 3^h T(1) + c\, n^2\, \Theta(1) \leq$$
$$n^2 T(1) + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$$

Verifica induttiva

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 3T(n/2) + cn^2 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

1. Vogliamo far vedere che $T(n) = O(n^2)$ cioè che esistono due costanti $k, n_0 \geq 0$ tali che $T(n) \leq kn^2$, per ogni $n \geq n_0$

Passo induttivo:

Supponiamo che sia vero per ogni $m<n$ e consideriamo $T(n)$

$T(n) = 3T(n/2) + cn^2$ per l'ipotesi induttiva si ha

$T(n/2) \leq k(n/2)^2$ quindi

$T(n) \leq 3\,k(n/2)^2 + cn^2$

Bisogna controllare se è vero che $3k(n/2)^2 + cn^2 \leq kn^2$

$\Leftrightarrow 3/4\; kn^2 + cn^2 \leq kn^2$

$\Leftrightarrow 3\; kn^2 + 4cn^2 \leq 4\; kn^2$

$\Leftrightarrow 4cn^2 \leq kn^2$ se $n \geq 1$

$\Leftrightarrow 4c \leq k$. Allora basta scegliere $k \geq 4c$ e $n_0 = 1$.

Trascuriamo il caso base.

Esempio algoritmo ricorsivo

```
analizzami(int n)
c = 1
m = n
while (m > 1) :
     c++
     m=m/2
if n >1 then analizzami(n/2)
```

$\Theta(1)$

$\Theta(\lg n)$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(\lg n)$$

Soluzione

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n/2) + c\lg n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Sia } n = 2^h}$

$$T(n) = T(n/2) + c\lg n = T(n/2^2) + c\lg n/2 + c\lg n$$

$$= T(n/2^3) + c\lg n/2^2 + c\lg n/2 + c\lg n$$

…

$$= T(1) + \sum_{i=0,\dots,h-1} c\lg n/2^i$$

$$= T(1) + c\sum_{i=0,\dots,h-1} (\lg n - i) =$$

$$T(1) + c\sum_{i=0,\dots,h-1} \lg n - c\sum_{i=0,\dots,h-1} i$$

$= T(1) + ch\lg n - ch(h-1)/2$. Ponendo $h = \lg n$

$T(1) + c\lg^2 n - c/2\lg^2 n - c\lg n/2 = \Theta(\lg^2 n)$

$O(\lg^2 n)$

Dimostriamo che $T(n) = O(\lg^2 n)$.

Ipotesi induttiva: **supponiamo che $T(m) \le k \lg^2 m$ per ogni $m < n$ e consideriamo $T(n)$:**

per l'ipotesi induttiva

$$T(n) = T(n/2) + c \lg n \le k \lg^2 n/2 + c \lg n$$

$$\le k (\lg n - 1)^2 + c \lg n$$

$$\le k (\lg^2 n + 1 - 2 \lg n) + c \lg n =$$

$$k \lg^2 n + k - 2 k \lg n + c \lg n$$

Si vuole che

$k \lg^2 n + \underbrace{k - 2 k \lg n + c \lg n} \le k \lg^2 n$, cioè che

$k - 2 k \lg n + c \lg n \le 0$, cosa vera per esempio per $k = c$ e $n \ge 2$

$\Omega(\lg^2 n)$

Dimostriamo che $T(n) = \Omega(\lg^2 n)$.

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(m) \geq k \lg^2 m$ per ogni $m < n$ e consideriamo $T(n)$:

$$T(n) = T(n/2) + c \lg n \geq k \lg^2 n/2 + c \lg n \geq$$

$$k (\lg n - 1)^2 + c \lg n \geq k(\lg^2 n + 1 - 2\lg n) + c\lg n$$

$$= k\lg^2 n + k - 2k\lg n + c \lg n$$

Si vuole che

$$k \lg^2 n \underbrace{+ k - 2 k \lg n + c \lg n}_{} \geq k \lg^2 n, \text{ cioè che}$$

$k - 2 k \lg n + c \lg n \geq 0$,

cosa vera per esempio per $k = c/2$ e $n \geq 1$