Si vuole determinare un massimo locale in una matrice quadrata.

A =

	1	2	…	n/2-1	n/2	n/2+1	…	n-1	n
1									
…									
n/2-1									
n/2									
n/2+1									
n									

Per trovare un massimo locale vorremmo ridurci a un quadrante in modo da dimezzare sia il numero delle righe che quello delle colonne. L’ipotesi che la matrice sia quadrata anche ogni volta che si prende un quadrante serve per semplificare e l’analisi del problema e la determinazione del tempo di esecuzione.

Tentativo 1.

A =

	1	2	…	n/2-1	n/2	n/2+1	…	n-1	n
1									
…									
n/2-1			b						
n/2			a						
n/2+1									
n									

A' =

	1	2	…	n/2-1
1				
2				
…			b	
n/2-1				

Calcoliamo il <u>massimo</u> tra gli elementi della colonna e della riga centrali, sia a = A[i,n/2], se è un massimo locale siamo a posto.
Altrimenti se a < b = A[i,n/2-1], allora si dirige la ricerca nel quadrante sinistro in alto della matrice, scartando le righe e le colonne da n/2 fino a n.
Procediamo analogamente negli altri casi.
Un massimo locale in questa sotto matrice è sempre un massimo locale per A?
Se si prendesse un massimo globale nel quadrante, questo risulterebbe maggiore o uguale a b e quindi maggiore degli elementi del bordo

Verifica tentativo 1

A =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		<a’		b	a				
2	<a’	<a’	<a’	<a’	<a				
3		a’	b’>a’	d	<a				
4		<a’	c	e	<a				
5	<a	<a	k<a	h<a	<a				
6									
7									
8									
9									

b > a   b’ > a’

c = max{b’,c,d}

c > a’

se e > c
e è un massimo locale
nella sotto matrice quadrata
altrimenti c.
Ma
c > k ? o h > a?

Calcoliamo il <u>massimo</u> tra gli elementi della colonna e della riga centrali, sia a = A[1,5], nell’esempio, se è un massimo locale siamo a posto.
Altrimenti se a < b = A[1,4], allora si dirige la ricerca nel quadrante sinistro in alto della matrice. Ora prendiamo il massimo tra la riga e la colonna centrale, sia a’ e supponiamo che l’elemento a destra b’ sia maggiore di a’.
Sia ora c il massimo tra i tre elementi della colonna 3 e riga 4 nel quadrante.
Allora un massimo locale nel quadrante potrebbe essere e o c, ma non possiamo dedurre che sia un massimo locale per la matrice.

Superamento tentativo 1

A =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		<a’		b	a				
2	<a’	<a’	<a’	<a’	<a				
3		a’	b’	d	<a				
4		<a’	c	e	<a				
5	<a	<a	k<a	h<a	<a				
6									
7									
8									
9									

b > a

b’ > a’

c = max{b’,c,d}

c > a’

se e > c
e è un massimo locale
nella sotto matrice quadrata
altrimenti c.
Ma
c > k ? o h > a?

L’analisi suggerisce la modifica, infatti il problema è sempre il “bordo” della sotto matrice che si considera. In questo caso i “bordi” sono quattro, infatti ci si potrebbe ridurre a una sotto matrice interna su tutti i lati.

Modifica del metodo

A =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a
2	<a			b>	a				<a
3	<a				<a				<a
4	<a	a’			<a				<a
5	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a
6	<a				<a		<a		<a
7	<a				<a				<a
8	<a				<a				<a
9	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a	<a

b > a   a’ > b

Se a’ è il massimo tra gli elementi della sotto matrice 3 x 3 allora è maggiore di b e dunque di a ed è un massimo locale.

Calcoliamo il <u>massimo</u> tra gli elementi nella prima e ultima colonna, in quella centrale, nella prima e ultima riga e in quella centrale, sia a = A[2,5], nell’esempio, se è un massimo locale siamo a posto.
Altrimenti se a < b = A[2,4] allora si dirige la ricerca nel quadrante sinistro in alto della matrice. Ora prendiamo di nuovo il massimo come prima, che risulta il massimo tra tutti gli elementi della sotto matrice.
Sembra corretto.

Algoritmo 4 - bozza

A =

	1	2	…	n/2-1	n/2	n/2+1	…	n-1	n
1									
…									
n/2-1			b						
n/2			a						
n/2+1			c						
n									

A' =

	1	…	n/4	…	n/2-1
1					
…					
n/4					a'
…					
n/2-1				b	

Calcoliamo il massimo tra gli elementi nella prima e ultima colonna, in quella centrale, nella prima e ultima riga e in quella centrale, sia a = A[i,j].
Se a è un massimo locale, abbiamo finito,
altrimenti
se i = n/2 e j < n/2 oppure i < n/2 e j= n/2
posto b = A[i-1,j] se a = A[n/2,j] e b = A[i,j-1] se a = A[i,n/2],
se a < b allora si dirige la ricerca nel quadrante sinistro in alto della matrice, altrimenti …
in tutti gli altri casi, in modo analogo si dirige la ricerca nel quadrante opportuno
Un massimo locale in questa sotto matrice è un massimo locale per A?

Algoritmo 4 : verifica idea (passo induttivo)

A =

	1	2	…	n/2-1	n/2	n/2+1	…	n-1	n
1					<a				
…					<a				
n/2-1			b		<a				
n/2			a		<a				
n/2+1			c						
n									

A' =

	1	…	n/4	…	n/2-1
1					
…					a'>b
n/4					
…					
n/2-1				b	

Se a' non è su un bordo è sicuramente un massimo locale anche per A.
Se, per esempio, a' = A[i,n/2-1] è un massimo locale per il quadrante dobbiamo dimostrare che si tratta di un massimo locale per A.
Il problema è il confronto con A[i,n/2], ma a' è il massimo tra gli elementi della prima, ultima e la riga centrale, la prima, l'ultima e la colonna centrale del quadrante superiore, quindi è maggiore dell'elemento b sul bordo che ha determinato la scelta del quadrante, b a sua volta è maggiore di a che era il massimo tra gli elementi della prima, ultima e la riga centrale, la prima, l'ultima e la colonna centrale della matrice.
In conclusione a' > b > a.
Ovunque si trovi a' su un bordo un ragionamento analogo porta alla medesima conclusione.

Base

A =

	1	2
1		
2		

A' =

	1	2	3
1			
2			
3			

Quando ci si riduce a una matrice 2x2, o 3x3 il massimo tra gli elementi è banalmente un massimo locale nel quadrante.
E' un massimo locale per la matrice?

A =

		…	j-1	j	j+1	j+2	…	n-1	n
1									
…	…								
i-1			< a	< a	< a	< a			
i			< a		b>a	a			
i+1			< a		a'	< a			
i+2			< a	< a	< a	< a			
…									
n									

b > a

a' = max nel quadrante 2x2

Poiché a' > b > a a' è un massimo locale per la matrice

Se la sottomatrice è più piccola con ragionamento analogo si ottiene che il massimo ivi calcolato è un massimo locale per la matrice di partenza.

Algoritmo 4 : tempo di esecuzione

Se ad ogni passo ci si riduce a una matrice quadrata di dimensione pari alla metà di quella di partenza.
Si calcola il massimo in tre righe e tre colonne nella matrice correntemente in esame, quindi si deve valutare la somma:

$$T(n) = O(n) + O(n/2) + O(n/4) + \ldots + O(n/2^{\lg n})$$

cioè

$$T(n) = cn \sum_{1 \le i \le \lg n} (1/2)^i \le cn \sum_{0 \le i \le \infty} (1/2)^i = O(n)$$